

Parcial II – Cálculo Vectorial

Septiembre 21 de 2010

(6 Puntos) **I.** Diga falso o verdadero justificando matemáticamente su respuesta:

(i) La función $f(x, y)$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en todo punto.

(ii) La dirección de máximo incremento de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$, en el punto $(2, -1, 1)$, es $\langle 4, 2, 4 \rangle$.

(iii) Si $y^3 + y^2 - 5y = x^2 - 4$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2+2y-5}$.

(6 Puntos) **II.** Considere la función $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4 + 1$.

(i) Encuentre los puntos críticos de la función.

(ii) Clasifique los puntos críticos de $f(x, y)$ en máximos, mínimos y puntos de silla.

(iii) Haga un boceto de la superficie en $\mathbb{R}^3$ definida por la función.

(4 Puntos) **III.** Sea $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3$.

(i) Encuentre los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3$ sujeta a la condición $x^2 + y^2 = 10$.

(ii) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $f(x, y)$ en el punto en el que realiza su mínimo. Haga una gráfica que ilustre su respuesta.

Solución

I.

(i) FALSO. Una función $f(x, y)$ es continua en el punto (a, b) si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b),$$

así que debemos verificar que el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ exista y sea igual a 0. Sin embargo, es fácil ver que el valor de tal límite sería cero si tomamos cualquiera de los

ejes, pero si lo calculamos por una recta cualquiera no. Por ejemplo, calculando por la recta $y = x$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2},$$

así que la función *no* es continua en $(0,0)$.

- (ii) FALSO. La dirección de máximo incremento de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4z$ en el punto $(2,-1,1)$ está dada por $\vec{\nabla} F|_{(2,-1,1)} = \langle 2x, 2y, -4 \rangle|_{(2,-1,1)} = \langle 4, -2, -4 \rangle \neq \langle 4, 2, 4 \rangle$.
- (iii) VERDADERO. Sea $F(x,y) = y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4$, entonces $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$.

II.

- (i) Los puntos críticos de la función $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4 + 1$ se encuentran donde sus derivadas parciales se anulen. Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y - 4x^3 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y^3$$

debemos verificar que $y = x^3$ y $x = y^3$, es decir que $y = y^9$ o, lo que es lo mismo

$$y(1 - y^8) = 0.$$

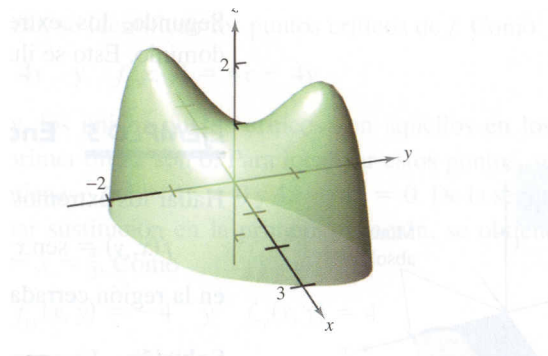
Hay tres valores posibles para y : $0, 1$ y -1 , así que los puntos críticos son $(0,0)$, $(1,1)$ y $(-1,-1)$.

- (ii) Para clasificar los puntos críticos de $f(x,y)$ en máximos, mínimos y puntos de silla debemos calcular el determinante de la matriz de segundas derivadas:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{pmatrix} = 144x^2y^2 - 16,$$

así que, para el punto $(0,0)$ el determinante es $\det D|_{(0,0)} = -16 < 0$, luego tal punto es un *punto de silla*. Por otra parte, $\det D|_{(1,1)} = \det D|_{(-1,-1)} = 128 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(1,1)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(-1,-1)} = -12 < 0$, luego tales puntos corresponden a *máximos locales*.

- (iii) Según lo anterior la gráfica de la función debe ser algo como lo que muestra la figura:



III.

- (i) Los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3$, sujeta a la condición $g(x, y) = x^2 + y^2 = 10$, pueden calcularse mediante el uso de multiplicadores de Lagrange: Primero $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$, i.e.

$$\langle 2x - 2, 4y \rangle = \lambda \langle 2x, 2y \rangle,$$

lo que nos da dos ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 2 &= 2\lambda x \\ 4y &= 2\lambda y. \end{cases}$$

Para que la segunda ecuación se verifique es necesario que $\lambda = 2$ o que $y = 0$. En el primer caso, a partir de la primera tenemos que $x = -1$ y, usando la restricción, obtenemos como posibles valores para $y = \pm 3$. Así, la primera opción nos da los puntos $(-1, 3), (-1, -3)$. La segunda opción, $y = 0$, implica que $x = \pm\sqrt{10}$, lo que nos deja un par de puntos mas: $(\sqrt{10}, 0), (-\sqrt{10}, 0)$. Evaluando en la función tenemos que

$$f(-1, 3) = f(-1, -3) = 24, \quad f(\sqrt{10}, 0) = 13 - 2\sqrt{10}, \quad \text{y} \quad f(-\sqrt{10}, 0) = 13 + 2\sqrt{10},$$

luego la función tiene *dos* máximos, en $(-1, 3)$ y $(-1, -3)$, y *un* mínimo en $(-\sqrt{10}, 0)$. Observe que el valor de f en el otro punto satisface $13 - 2\sqrt{10} < f(-\sqrt{10}, 0) < 24$, luego no es ni máximo ni mínimo.

- (ii) La ecuación del plano tangente a la superficie definida por $f(x, y)$ en el punto $P = (-\sqrt{10}, 0, 13 - 2\sqrt{10})$ está dada por

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_P (x + \sqrt{10}) + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_P (y - 0) + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_P (z - 13 + 2\sqrt{10}) = 0,$$

donde $F(x, y, z) = z - x^2 - 2y^2 + 2x - 3$ es la función en tres variables que describe la superficie cuando $F(x, y, z) = 0$. Derivando y reemplazando tenemos que

$$(2 - 2x)|_P (x + \sqrt{10}) + (-4y)|_P (y - 0) + (1)|_P (z - 13 + 2\sqrt{10}) = 0,$$

es decir que la ecuación del plano es:

$$(2 - 2\sqrt{10})x + z + 7 = 0.$$