

Parcial I – Cálculo Vectorial

Marzo 3 de 2011

(9 Puntos) **I.** Diga falso o verdadero justificando matemáticamente su respuesta:

(i)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

(ii) Si $f(x, y) = e^{-x} \cos y$, entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

(iii) Si $\ln(xy) \sin z = 2$, entonces

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{y}{x}.$$

(15 Puntos) **II.** Considere la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ y el plano $z = 1$ en el espacio.

(i) Haga una gráfica de ambas superficies, su curva de intersección, y encuentre una parametrización de tal curva.

(ii) Calcule la longitud de la curva de intersección.

(iii) Calcule la curvatura de la curva de intersección.

(iv) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$.

(v) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$.

(8 Puntos) **III.** Considere la función $f(x, y) = x^4 + y^4 - 16xy + 1$.

(i) Encuentre y clasifique todos los puntos críticos de $f(x, y)$.

(ii) Encuentre los valores mínimos de la función $f(x, y)$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

Solución

I.

(i) FALSO. Debemos verificar que el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ exista y sea igual a 0. Sin embargo, es fácil ver que el valor de tal límite sería 1 si tomamos como camino el eje x , -1 si lo calculamos sobre el eje y pero, por ejemplo, calculando por la recta $y = x$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \frac{0}{2x^2} = 0,$$

así que el límite *no* existe.

(ii) FALSO. Es fácil ver que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x} \cos y$$

mientras que

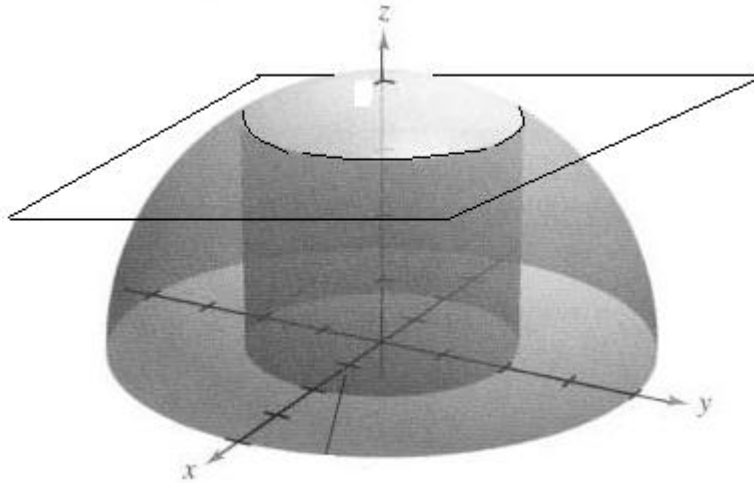
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{-x} \cos y.$$

(iii) VERDADERO. Sea $F(x, y) = \ln(xy) \sin z - 2$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{y}{xy} \sin z}{\frac{x}{xy} \sin z} = -\frac{y}{x}.$$

II.

(i) Le gráfica sería algo así:



Para parametrizar la curva obsérvese que, en $z = 1$, la ecuación de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ se reduce a $x^2 + y^2 = 4$, así que buscamos parametrizar un círculo de radio 2 en el plano $z = 1$. Una buena parametrización sería:

$$\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 1), \quad t \in [0, 2\pi].$$

(ii) Como $\vec{r}'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 0)$, para $t \in [0, 2\pi]$, la longitud de la curva es:

$$\ell = \int_0^{2\pi} |\vec{r}'(t)| dt = \int_0^{2\pi} 2 dt = 4\pi.$$

(iii) La curvatura de un círculo de radio r es $\kappa = \frac{1}{r}$, así que en este caso es $\frac{1}{2}$.

(iv) El punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ corresponde al valor del parámetro $t = \frac{\pi}{4}$, así que

$$\vec{x} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1) + s \vec{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1) + s(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0).$$

- (v) Finalmente, la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $F(x, y, z) = 0$ en el punto $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ está dada por

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_P (x - \sqrt{2}) + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_P (y - \sqrt{2}) + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_P (z - 1) = 0,$$

donde $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 5$. Derivando y reemplazando tenemos que

$$(2x)|_P(x - \sqrt{2}) + (2y)|_P(y - \sqrt{2}) + (2z)|_P(z - 1) = 0,$$

es decir que la ecuación del plano es:

$$2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2z = 10.$$

III.

- (i) Los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^4 + y^4 - 16xy + 1$ se encuentran donde sus derivadas parciales se anulen. Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 16y \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 16x$$

debemos verificar que $4y = x^3$ y $4x = y^3$, es decir que $4^4 y = y^9$ o, lo que es lo mismo

$$y(4^4 - y^8) = 0.$$

Hay tres valores posibles para y : 0, 2 y -2, así que los puntos críticos son $(0, 0)$, $(2, 2)$ y $(-2, -2)$.

Para clasificar los puntos críticos de $f(x, y)$ en máximos, mínimos y puntos de silla debemos calcular el determinante de la matriz de segundas derivadas:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 12x^2 & -16 \\ -16 & 12y^2 \end{pmatrix} = 144x^2y^2 - 256,$$

así que, para el punto $(0, 0)$ el determinante es $\det D|_{(0,0)} = -256 < 0$, luego tal punto es un *punto de silla*. Por otra parte, $\det D|_{(2,2)} = \det D|_{(-2,-2)} = 144(4^2) - 256 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(2,2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(-2,-2)} = 48 > 0$, luego tales puntos corresponden a *mínimos locales*.

- (ii) La restricción es la función $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, así que $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$, i.e.

$$\langle 4x^3 - 16y, 4y^3 - 16x \rangle = \lambda \langle 2x, 2y \rangle,$$

lo que nos da dos ecuaciones

$$\begin{cases} 4x^3 - 16y &= 2\lambda x \\ 4y^3 - 16x &= 2\lambda y. \end{cases}$$

Despejando λ tenemos que

$$\lambda = \frac{4x^3 - 16y}{2x} = \frac{4y^3 - 16x}{2y},$$

luego

$$2y(4x^3 - 16y) = 2x(4y^3 - 16x),$$

es decir que

$$8xy(x^2 - y^2) = 32(y^2 - x^2),$$

o

$$(xy + 4)(x^2 - y^2) = 0.$$

Como $xy = -4$ no satisface la restricción, tenemos que $x = \pm y$. Despejando en la restricción obtenemos que

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}},$$

así que la función f puede alcanzar su mínimo en los puntos $(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$, $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$, $(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}})$ o $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}})$. Finalmente, para encontrar el valor mínimo de la función, evaluamos f en los cuatro puntos anteriores, obteniendo:

$$f(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}) = f(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}) = -\frac{13}{2}, \quad f(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}) = f(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{19}{2},$$

luego la función tiene *dos* mínimos, en $(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$ y $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}})$.