Parcial II – Cálculo Vectorial

Abril 12 de 2011

(10 Puntos) **I**. Calcule el área de la superficie del hemisferio superior de la esfera $x^2+y^2+z^2=16$ que queda bajo el cono $z^2=3x^2+3y^2$. Haga la gráfica correspondiente.

(10 Puntos) **II**. Calcule la integral

$$\iint_R 81xy^2\,dA,$$

donde la región R es el paralelogramo acotado por las rectas $x-2y=0$, $x+y=4$, $x-2y=-4$ y $x+y=1$. Haga la gráfica correspondiente.

(10 Puntos) **III**. La siguiente integral calcula el volumen de un sólido en el espacio:

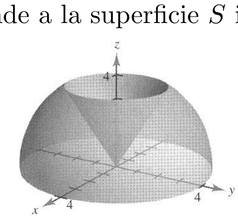
$$\int_0^1\int_y^1\int_0^{e^{-x^2}} dz\,dx\,dy.$$

Haga una gráfica del sólido correspondiente y calcule su volumen.

BONO (5 Puntos) **IV**. Calcule el volumen de la porción del hemisferio superior de la esfera $x^2+y^2+z^2=16$ que queda bajo el cono $z^2=3x^2+3y^2$. (La gráfica correspondiente es la misma del punto **I**.)

Solución

I. **I**. El área de la superficie del hemisferio superior de la esfera $x^2+y^2+z^2=16$ que queda bajo el cono $z^2=3x^2+3y^2$ corresponde a la superficie S indicada en la gráfica:



Para calcular tal área debemos calcular la integral

$$A(S)=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dA$$

donde $f(x,y)$ es la función que define la superficie, en este caso la esfera, y D es el dominio plano de integración. Es claro que las dos superficies se intersectan cuando $4z^2=16$, es decir cuando

$z=2$, así que a partir de la gráfica concluimos que $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|2\leq x^2+y^2\leq 4\}$, luego

$$A(S)=\iint_D\sqrt{\frac{16}{16-x^2-y^2}}dA=\int_0^{2\pi}\int_2^4\sqrt{\frac{16}{16-r^2}}rdrd\theta=2\pi\int_2^4\sqrt{\frac{16}{16-r^2}}rdr$$

lo que da

$$A(S)=2\pi\sqrt{16}(-\sqrt{16-r^2})|_2^4=16\sqrt{3}\pi.$$

II. Para calcular la integral $\iint_R 81xy^2\,dA$, donde la región R es el paralelogramo acotado por las rectas $x-2y=0$, $x+y=4$, $x-2y=-4$ y $x+y=1$, el cambio de variables sugerido por las ecuaciones de las rectas es:

$$-4\leq u=x-2y\leq 0\qquad\text{y}\qquad 1\leq v=x+y\leq 4.$$

Así,

$$x=\frac{u+2v}{3}\qquad\text{y}\qquad y=\frac{v-u}{3},$$

luego el Jacobiano de la trnsformación es

$$J=\det\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3},$$

y la integral es

$$\iint_R 81xy^2\,dA=\int_1^4\int_{-4}^0 81\left(\frac{u+2v}{3}\right)\left(\frac{v-u}{3}\right)^2\frac{1}{3}\,dudv=\int_1^4\int_{-4}^0(u^3-3uv^2+2v^3)\,dudv=198.$$

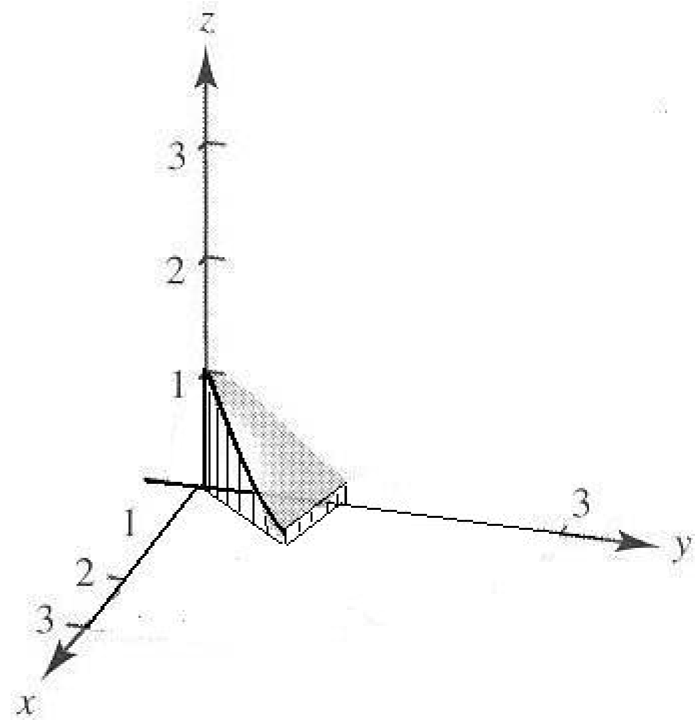
III. Para dibujar el sólido cuyo el volumen es calculado por la integral

$$\int_0^1\int_y^1\int_0^{e^{-x^2}}dz\,dx\,dy$$

debemos descomponer los límites:

$$0\leq z\leq e^{-x^2},\quad y\leq x\leq 1\quad\text{y}\quad 0\leq y\leq 1.$$

De esta forma, el volumen descrito debe ser el ilustrado en la figura:



Para calcularlo, dado que en el orden en el que aparecen las integrales no se puede hacer explícitamente, podemos reescribirla como

$$\int_0^1 \int_y^1 \int_0^{e^{-x^2}} dz\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^x \int_0^{e^{-x^2}} dz\, dy\, dx = \int_0^1 x e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right).$$