Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Cálculo en Variable Compleja – Parcial 1

Septiembre 3 de 2015

I. Calcule los siguientes números complejos:

a. `[2 Puntos]`. $\log(-3)$ en la rama del logaritmo dada por $\arg(z) \in [0, 2\pi)$.

b. `[2 Puntos]`. $\log(-3)$ en la rama del logaritmo dada por $\arg(z) \in [-\pi, \pi)$.

c. `[2 Puntos]`. $(-3)^i$ en la rama del logaritmo dada por $\arg(z) \in [0, 2\pi)$.

d. `[2 Puntos]`. $(-3)^i$ en la rama del logaritmo dada por $\arg(z) \in [-\pi, \pi)$.

II. Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ la función compleja definida por $u(x,y) = x^3 + 4x^2 + 6x - 3xy^2 - 4y^2$ y $v(x,y) = 3x^2y + 8xy + 6y - y^3$.

a. `[2 Puntos]`. Encuentre la región del plano complejo en la cual $f(z)$ es analítica.

b. `[2 Puntos]`. Escriba la derivada de $f(z)$ en términos de x y y en los puntos en los que existe.

c. `[2 Puntos]`. Escriba la derivada de $f(z)$ como un polinomio en z en los puntos en los que existe.

III. El objetivo de este ejercicio es usar los métodos de integración compleja vistos en clase para demostrar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{5 + 4\cos t} dt = 2\pi. \tag{1}$$

a. `[2 Puntos]`. Considere la función compleja $f(z) = \frac{3z}{2(z+2)(z+\frac{1}{2})}$ y demuestre que $f(z(t)) = \frac{3}{5+4\cos t}$ sobre el camino $z(t) = e^{it}$.

b. `[2 Puntos]`. Use la fórmula de integración de Cauchy, integrando sobre el círculo unitario, para demostrar (1) indicando claramente en una gráfica la ubicación de los polos de la función $f(z)$ respecto al contorno.

c. `[2 Puntos]`. Demuestre que, en general, la fórmula de integración de Cauchy implica que si f es una función analítica en un dominio que incluye completamente el disco cerrado $D_r(z_0)$, su valor en el centro del círculo $C_r(z_0)$ es el promedio de su valor sobre la circunferencia, i.e.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

IV. Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.

a. `[2 Puntos]`. $\lim_{z\to i} \frac{z-i}{z^2+1} = \frac{-i}{2}$.

b. `[2 Puntos]`. $\overline{e^{iz}} = e^{-iz}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

c. `[2 Puntos]`. La función $f(z) = e^{\mathrm{Re}(z)}$ solo es derivable, como función compleja, en $z = 0$.

d. `[2 Puntos]`. Si $z \in \mathbb{C}$ no es cero, entonces $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ si y solo si $|z| = 1$.

e. `[2 Puntos]`. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n = \frac{4+2i}{5}$.

Solución

I.

a. $\log(-3)$ en la rama del logaritmo dada por $\arg(z) \in [0, 2\pi)$ es

$$\log(-3) = \ln 3 + i\pi.$$

b. $\log(-3)$ en la rama del logaritmo dada por $\arg(z) \in [-\pi, \pi)$ es

$$\log(-3) = \ln 3 - i\pi.$$

c. $(-3)^i$ en la rama del logaritmo dada por $\arg(z) \in [0, 2\pi)$ es, usando la definición del logaritmo en la rama correspondiente,

$$(-3)^i = e^{i \log(-3)} = e^{i(\ln 3 + i\pi)} = e^{-\pi} \left(\cos(\ln 3) + i \sin(\ln 3)\right).$$

d. $(-3)^i$ en la rama del logaritmo dada por $\arg(z) \in [-\pi, \pi)$ es, usando la definición del logaritmo en la rama correspondiente,

$$(-3)^i = e^{i \log(-3)} = e^{i(\ln 3 - i\pi)} = e^{\pi} \left(\cos(\ln 3) + i \sin(\ln 3)\right).$$

II. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ la función compleja definida por $u(x, y) = x^3 + 4x^2 + 6x - 3xy^2 - 4y^2$ y $v(x, y) = 3x^2 y + 8xy + 6y - y^3$.

a. La función $f(z)$ es analítica en todo el plano complejo, ya que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se verifican para cualquier valor de x y y:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 8x - 3y^2 + 6 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - 8y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

b. Sabemos que

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = (3x^2 + 8x - 3y^2 + 6) + i(6xy + 8y).$$

c. Finalmente, como se observa fácilmente a partir del resultado anterior, si $z = x + iy$,

$$f'(z) = 3z^2 + 8z + 6.$$

III.

a. Considere la función compleja $f(z) = \frac{3z}{2(z+2)(z+\frac{1}{2})}$ y el camino $z(t) = e^{it}$. Entonces, dado que

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z(t) + z(t)^{-1}}{2} = \frac{z(t)^2 + 1}{2z(t)},$$

tenemos que

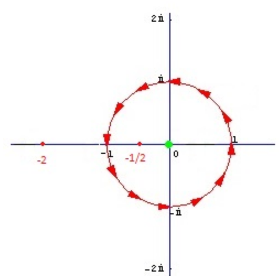
$$\frac{3}{5 + 4\cos t} = \frac{3}{5 + 2\left(\frac{z(t)^2+1}{z(t)}\right)} = \frac{3z(t)}{2z(t)^2 + 5z(t) + 2} = \frac{3z(t)}{2(z(t)+2)(z(t)+\frac{1}{2})} = f(z(t)).$$

b. Si usamos la fórmula de integración de Cauchy, integrando la función $g(z) = \frac{3}{2(z+2)(z+\frac{1}{2})}$ sobre el círculo unitario γ parametrizado por $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, tenemos que, por una parte,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma g(z)dz &= \int_0^{2\pi} g(z(t))z'(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2(z(t)+2)(z(t)+\frac{1}{2})}(iz(t))dt \\
&= i\int_0^{2\pi} f(z(t))dt = i\int_0^{2\pi} \frac{3}{5+4\cos t}dt
\end{aligned}$$

mientras que, por otra parte, usando la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_\gamma g(z)dz = \frac{3}{2}\int_\gamma \frac{dz}{(z+2)(z+\frac{1}{2})} = 2\pi i\,\frac{3}{2}\left[\frac{1}{(z+2)}\right]_{z=-\frac{1}{2}} = 2\pi i,$$



ya que la función $\frac{1}{z+2}$ es analítica en un conjunto convexo que contiene completamente el contorno y su interior, y el único polo de la función $\frac{1}{z+\frac{1}{2}}$, i.e. $z = -\frac{1}{2}$, está en el interior de tal contorno, como ilustra la figura. Así, queda entonces demostrado que

$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{5+4\cos t}dt = 2\pi.$$

c. Si f es una función analítica en un dominio que incluye completamente el disco cerrado $\overline{D}_r(z_0)$, y parametrizamos tal círculo como

$$z(t) = z_0 + re^{it},$$

con $t \in [0, 2\pi]$, la fórmula de integración de Cauchy implica que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z(t))z'(t)}{z(t)-z_0}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})ire^{it}}{re^{it}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})dt.$$

IV.

a. VERDADERO.

$$\lim_{z\to i}\frac{z-i}{z^2+1}=\lim_{z\to i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2i}=\frac{-i}{2}.$$

b. FALSO. Si $z=i$

$$\overline{e^{iz}}=\overline{e^{i^2}}=\overline{e^{-1}}=e^{-1}\neq e=e^{-iz}.$$

c. FALSO. La función $f(z)=e^{\mathrm{Re}(z)}=e^x$ si $z=x+iy$, así que las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se complen en $z=0$.

d. FALSO. Si $z\in\mathbb{C}$ no es cero, entonces $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$ si y solo si $|z|=1$ *o* $z\in\mathbb{R}$.

e. VERDADERO. Como $|\frac{i}{2}|<1$ la suma converge. Siendo una serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{i}{2}}=\frac{2(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{4+2i}{5}.$$