Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Cálculo en Variable Compleja – Parcial 2

Octubre 15 de 2015

I. Para cada una de las siguientes funciones diga qué tipo de singularidad tiene en $z = 0$ (aparente, polo –e indique el orden– o esencial), y calcule su serie de potencias correspondiente:

a. `[2 Puntos]`. $f(z) = \frac{1}{z \sin z}$.

b. `[2 Puntos]`. $f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$.

II. Encuentre el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

a. `[2 Puntos]`. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k} z^k$.

b. `[2 Puntos]`. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} z^{3k}$.

III. Calcule las siguientes integrales:

a. `[2 Puntos]`. $\int_{|z-i|=1} \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3} dz$.

b. `[2 Puntos]`. $\int_{|z-1-2i|=3} \frac{z^2-4}{(z^2+1)^2} dz$.

IV. Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.

a. `[2 Puntos]`. Si f es una función entera y su parte real es acotada, entonces f es constante.

b. `[2 Puntos]`. Si f es una función entera y su parte real es positiva, entonces f es constante.

c. `[2 Puntos]`. Si f es una función entera y $f(x + 2\pi) = f(x)$ para cualquier x en $\mathbb{R}$, entonces $f(z + 2\pi) = f(z)$ para cualquier z en $\mathbb{C}$.

d. `[2 Puntos]`. El radio de convergencia de la serie de potencias, alrededor de cero, de la función $\frac{z^3-1}{z^2+3z-4}$ es 4.

V. **Bono.** El objetivo de este ejercicio es calcular la integral impropia

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx. \tag{1}$$

a. `[2 Puntos]`. Demuestre que (1) es igual a

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \left(\int_{-R}^{-\frac{1}{R}} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx + \int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx \right)$$

y que este límite existe.

b. `[2 Puntos]`. Demuestre que $\frac{\sin x}{x(x^2+1)} = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}\right)$, para $x \in \mathbb{R}$. Encuentre los polos de la función $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$ en el interior del ciclo $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, orientado positivamente, donde:

$$\gamma_1 = [-R, -\frac{1}{R}], \quad \gamma_2 = \frac{1}{R} e^{it} \quad \text{para} \quad t \in [\pi, 0]$$

$$\gamma_3 = [\frac{1}{R}, R] \quad \text{y} \quad \gamma_4 = Re^{it} \quad \text{para} \quad t \in [0, \pi].$$

Trace una gráfica.

c. `[2 Puntos]`. Use la fórmula integral de Cauchy para demostrar que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = -\frac{i\pi}{e} \qquad \text{y} \qquad \int_{\gamma_2} f(z) dz = -i\pi.$$

d. `[2 Puntos]`. Demuestre que

$$\left| \int_{\gamma_4} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi}{R^2}$$

y concluya que (1) es igual a $\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

Solución

I.

a. La función $f(z) = \frac{1}{z \sin z}$ tiene un polo de orden 2 en $z = 0$. En efecto,

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin z} = 1,$$

y su serie de potencias alrededor de este punto es

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z\sin z} &= \frac{1}{z\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right)} = \frac{1}{z^2\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots\right)} \\
&= \frac{1}{z^2}\left[\frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \cdots\right)}\right] = \frac{1}{z^2}\left[1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \cdots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \cdots\right)^2 + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{z^2}\left[1 + \frac{z^2}{3!} + z^4\left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right) + \cdots\right] = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} + z^2\left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right) + \cdots
\end{aligned}$$

b. Ya que

$$\lim_{z\to 0} z^m f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^m}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$$

no existe para ningún entero positivo m, la función $f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$. Su serie de potencias puede calcularse tomando $w = \frac{1}{z}$ y usando $g(w) = \frac{1}{\sin w}$ como en el ejercicio anterior:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin w} &= \frac{1}{\left(w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} - \cdots\right)} = \frac{1}{w\left(1 - \frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} - \cdots\right)} \\
&= \frac{1}{w}\left[\frac{1}{1 - \left(\frac{w^2}{3!} - \frac{w^4}{5!} + \cdots\right)}\right] = \frac{1}{w^2}\left[1 + \left(\frac{w^2}{3!} - \frac{w^4}{5!} + \cdots\right) + \left(\frac{w^2}{3!} - \frac{w^4}{5!} + \cdots\right)^2 + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{w}\left[1 + \frac{w^2}{3!} + w^4\left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right) + \cdots\right] = \frac{1}{w} + \frac{w}{3!} + w^3\left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right) + \cdots,
\end{aligned}$$

así que

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)} = z + \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right) + \cdots$$

II. Sabemos que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z - z_o)^k$ está dado por

$$R = \left(\limsup |a_k|^{\frac{1}{k}}\right)^{-1}.$$

a. El radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k} z^k$ es

$$R = \left(\limsup \left(\frac{3^k}{k}\right)^{\frac{1}{k}}\right)^{-1} = \left(\limsup \left(\frac{3}{k^{\frac{1}{k}}}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{3}.$$

b. De igual forma, el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} z^{3k}$ es

$$R = \left(\limsup \left(\frac{2^k}{k!}\right)^{\frac{1}{k}}\right)^{-1} = \left(\limsup \left(\frac{2}{(k!)^{\frac{1}{k}}}\right)\right)^{-1},$$

i.e. es infinito.

III. Calcule las siguientes integrales:

a. Para calcular la integral $\int_{|z-i|=1} \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3} dz$ consideramos la función $g(z) = e^{z^2}$, que es analítica en el interior del disco cuya frontera es el círculo de radio 1 alrededor de i, donde se encuentra el polo de orden 3 del integrando y, por la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{|z-i|=1} \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3} dz = \frac{(2\pi i)\, g''(i)}{2!}.$$

Por otra parte, $g''(z) = 2ze^{z^2} + 4z^2 e^{z^2}$, luego $g''(i) = -\frac{2}{e}$ y

$$\int_{|z-i|=1} \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3} dz = -\frac{2\pi i}{e}.$$

b. Para calcular la integral $\int_{|z-1-2i|=3} \frac{z^2-4}{(z^2+1)^2} dz = \int_{|z-1-2i|=3} \frac{z^2-4}{(z+i)^2(z-i)^2} dz$ consideramos la función $g(z) = \frac{z^2-4}{(z+i)^2}$, que es analítica en el interior del disco de radio 3 alrededor de $1+2i$, donde solamente el polo (de orden 2) en $z = i$ de la función está contenido. Por la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{|z-1-2i|=3} \frac{z^2-4}{(z+i)^2(z-i)^2} dz = (2\pi i)\, g'(i)$$

y $g'(z) = \frac{2z}{(z+i)^2} - \frac{2(z-4)}{(z+i)^3}$, luego $g'(i) = \frac{3i}{4}$ y

$$\int_{|z-1-2i|=3} \frac{z^2-4}{(z^2+1)^2} dz = -\frac{3\pi}{2}.$$

IV. Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.

a. Si f es una función entera y su parte real es acotada, entonces f es constante.

`Verdadero`. El módulo de la función $F(z) = e^{f(z)}$ es $e^{\mathrm{Re} f(z)}$, así que al ser entera y acotada, por el Teorema de Liouville, es constante. Como $0 = F'(z) = f'(z)e^{f(z)}$, entonces $f'(z) = 0$ para todo z y, entonces, f es constante.

b. Si f es una función entera y su parte real es positiva, entonces f es constante.

`Verdadero`. Si f tiene parte real positiva, el módulo de la función entera $F(z) = e^{-f(z)}$ es $e^{-\mathrm{Re} f(z)}$, así que es acotada y, por el Teorema de Liouville, es constante. El argumento del punto anterior implica nuevamente que $f'(z) = 0$ para todo z y, entonces, f es constante.

c. Si f es una función entera y $f(x + 2\pi) = f(x)$ para cualquier x en $\mathbb{R}$, entonces $f(z + 2\pi) = f(z)$ para cualquier z en $\mathbb{C}$.

`Verdadero`. Por el Principio de Identidad, como lasa funciones $f(z + 2\pi) - f(z)$ y 0 son enteras, y coinciden en $\mathbb{R}$ –un subconjunto no discreto del plano complejo, entonces deben coincidir en todo $\mathbb{C}$.

d. El radio de convergencia de la serie de potencias, alrededor de cero, de la función $\frac{z^3-1}{z^2+3z-4}$ es 4.

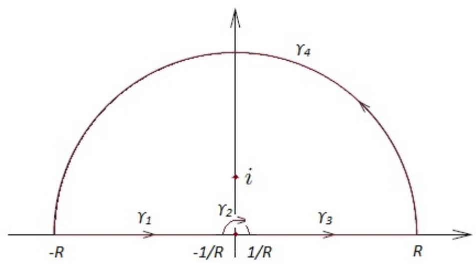
`Verdadero`. La función $\frac{z^3-1}{z^2+3z-4} = \frac{(z-1)(z^2+z+1)}{(z-1)(z+4)}$, tiene una singularidad en $z = 1$, pero es aparente, luego el radio de convergencia de la serie de potencias alrededor de $z = 0$ de tal función es la distancia entre $z = 0$ y $z = -4$, donde tiene la singularidad no removible.

V. **Bono.** Vamos calcular, usando métodos de variable compleja, la integral impropia (1).

a. Como $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1$, $\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} = 0$ y la función $\frac{1}{(x^2+1)}$ es integrable sobre $\mathbb{R}$, la integral existe y, por ser un integrando par,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\frac{1}{R}}^R \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \left(\int_{-R}^{-\frac{1}{R}} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx + \int_{\frac{1}{R}}^R \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx \right).$$

b. Ahora, $\operatorname{Im}\left(e^{ix}\right) = \operatorname{Im}\left(\cos x + i\sin x\right) = \sin x$, entonces $\frac{\sin x}{x(x^2+1)} = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}\right)$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Por otra parte, los polos de la función $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$ están en $z = 0, \pm i$, así que solamente uno de ellos ($z = i$) se encuentra en el interior del ciclo $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, orientado positivamente, (ver figura):



$$\gamma_1 = [-R, -\frac{1}{R}], \quad \gamma_2 = \frac{1}{R}e^{it} \quad \text{para} \quad t \in [\pi, 0],$$
$$\gamma_3 = [\frac{1}{R}, R] \quad \text{y} \quad \gamma_4 = Re^{it} \quad \text{para} \quad t \in [0, \pi].$$

c. Por la fórmula integral de Cauchy, dado que el polo en $z = i$ de la función $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)(z-i)}$ es simple, si $g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)}$ entonces

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z(z+i)(z-i)}dz = \int_\Gamma \frac{g(z)}{(z-i)}dz = 2\pi i\, g(i) = 2\pi i\, \frac{e^{i^2}}{i(2i)} = -\frac{i\pi}{e}.$$

De igual forma,

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = -\frac{1}{2}\int_{|z|=\frac{1}{R}} f(z)dz = -\frac{1}{2}(2\pi i)\left(\frac{e^0}{(-i^2)}\right) = -i\pi.$$

d. Dado que $\gamma_4(t) = Re^{it}$, tenemos que sobre γ_4

$$\left|e^{iRe^{it}}\right| = \left|e^{-R\sin t}\right| \leq 1,$$

entonces

$$\left|\int_{\gamma_4} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^3} = \frac{\pi}{R^2}.$$

Para terminar, tenemos que la fórmula integral de Cauchy implica que

$$\begin{aligned} -\frac{i\pi}{e} = \int_\Gamma f(z)dz &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz \\ &= \int_{-R}^{-\frac{1}{R}} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx + \int_{\gamma_4} f(z)dz \\ &= \int_{-R}^{-\frac{1}{R}} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx - i\pi + \int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx + \int_{\gamma_4} f(z)dz, \end{aligned}$$

y el lado izquierdo es claramente independiente de R. Tomando parte imaginaria en ambos lados, y usando el resultado de la parte **a.** tenemos que

$$-\frac{\pi}{e} + \pi = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{-\frac{1}{R}} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx + \int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx + \operatorname{Im}\int_{\gamma_4} f(z)dz\right),$$

y dado que, por lo observado anteriormente, $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_4} f(z)dz = 0$,

$$-\frac{\pi}{e} + \pi = 2\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx,$$

luego la integral (1) es igual a

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$