Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Cálculo en Variable Compleja – Parcial 2

Abril 19 de 2017

I. Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.

a. `[3 Puntos]`. $\oint_{\gamma_1} \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}dz = \oint_{\gamma_2} \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}dz$, donde γ_1 y γ_2 son los círculos de radio 1 y 3, respectivamente, centrados en el origen. *Ayuda:* $\frac{z^2+1}{z(z^2+4)} = \frac{1}{4z} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{z+2i} + \frac{1}{z-2i}\right)$.

b. `[3 Puntos]`. Si una función entera $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisface $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces es constante.

c. `[3 Puntos]`. La identidad $\cos z = -\operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$ es cierta para todo $z \in \mathbb{C}$.

d. `[3 Puntos]`. Si $p(z)$ es un polinomio y γ es un círculo centrado en el origen sobre el que no hay ninguna raiz de $p(z)$, entonces la integral $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{p'(z)}{p(z)}dz$ es igual al número de raices de $p(z)$ encerradas en el círculo γ, contando multiplicidades.

II. Calcule dos de las siguientes integrales:

a. `[2 Puntos]`. $\int_\gamma 12z^5 dz$, donde γ es el semicírculo de radio 2 entre los puntos 2 y $2i$.

b. `[2 Puntos]`. $\oint_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2+8)}dz$, donde γ es el cuadrado de vértices $2+2i$, $-2+2i$, $-2-2i$ y $2-2i$.

c. `[2 Puntos]`. $\oint_\gamma \frac{e^z}{z^2(z+1)^3}dz$, donde γ es el círculo de radio $\frac{1}{2}$ centrado en el origen.

III. Encuentre la expansión en serie de potencias de dos de las siguientes funciones, alrededor del punto dado, indicando su radio de convergencia:

a. `[2 Puntos]`. $f_1(z) = \frac{z}{z^4+9}$, alrededor de $z = 0$.

b. `[2 Puntos]`. $f_2(z) = \cos z$, alrededor de $z = \frac{\pi}{2}$. *Ayuda: Puede usar la parte* **c.** *del punto* **I**.

c. `[2 Puntos]`. $f_3(z) = -\log\left(1 - \frac{z^2}{2}\right)$, alrededor de $z = 0$.

IV. El objetivo de este ejercicio es calcular la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx$, donde $a, b > 0$.

a. `[2 Puntos]`. Considere el camino cerrado $\Gamma = \gamma_o + \gamma_R$, orientado positivamente, donde γ_o es el intervalo $[-R, R]$ y $\gamma_R(t) = Re^{it}$ para $t \in [0, \pi]$. Demuestre que, si $R > b$,

$$\oint_\Gamma \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}dz = \frac{\pi}{b}e^{-ab}.$$

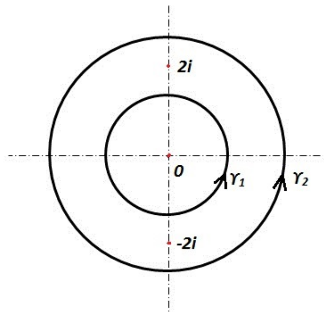
b. `[2 Puntos]`. Demuestre que $\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\,dz\right| \leq \frac{M}{R}$, para $M > 0$, y entonces $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\,dz = 0$.

c. `[2 Puntos]`. Concluya que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi}{b}e^{-ab}$.

Solución

I.

a. FALSO. La función $\dfrac{z^2+1}{z(z^2+4)} = \dfrac{1}{4z} + \dfrac{3}{8}\left(\dfrac{1}{z-2i} + \dfrac{1}{z-2i}\right)$ tiene tres polos simples, en $0, \pm 2i$, y como los contornos indicados no encierran los mismos polos las integrales no son iguales:



En efecto, usando la factorización indicada es fácil ver que $\displaystyle\oint_{\gamma_1} \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}dz = \frac{\pi i}{2}$, mientras que $\displaystyle\oint_{\gamma_2} \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}dz = 2\pi i$.

b. VERDADERO. Si una función entera $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisface $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, parametrizando el círculo centrado en cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$, de radio $R > 0$, como $z(t) = z_0 + Re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, por la fórmula integral de Cauchy tendríamos que

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{R^k} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{it})| \frac{dt}{2\pi} = \frac{k!}{R^k}$$

para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces todas las derivadas de f son nulas y f es constante.

c. VERDADERO. La identidad $\cos z = -\operatorname{sen}\left(z - \dfrac{\pi}{2}\right)$ es cierta para todo $z \in \mathbb{R}$ luego, por el principio de identidad tenemos que las funciones $f(z) = \cos z + \operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$ y $g(z) = 0$ son analíticas en todo $\mathbb{C}$ y coinciden en un conjunto no discreto en $\mathbb{C}$, luego deben ser iguales.

d. VERDADERO. Si $p(z)$ es un polinomio, por el teorema fundamental del álgebra (salvo una constante) podemos factorizarlo como $p(z) = (z-w_1)^{k_1}(z-w_2)^{k_2}\cdots(z-w_l)^{k_l}$, donde $w_1, w_2, \ldots, w_l$ denotan sus raices y $k_1, k_2, \ldots, k_l$ denotan sus respectivas multiplicidades. Entonces,

$$p'(z) = \sum_{i=1}^{l} k_i (z-w_1)^{k_1} \cdots (z-w_i)^{k_i - 1} \cdots (z-w_l)^{k_l}$$

y, entonces,

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^{l} \frac{k_i}{z - w_i}$$

así que, si γ es un círculo centrado en el origen sobre el que no hay ninguna raiz de $p(z)$, la integral dada es igual a

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{p'(z)}{p(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \sum_{i=1}^{l} \frac{k_i}{z-w_i}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{l} k_i \oint_\gamma \frac{1}{z-w_i}dz$$

y, como cada una de estas integrales es igual a cero (si la raiz w_i *no* está dentro del contorno) ó $2\pi i$ (si lo está, esta suma es igual al número de raices de $p(z)$ encerradas en el círculo γ, contando multiplicidades.

II.

a. Si γ es el semicírculo de radio 2 entre los puntos 2 y $2i$, como la función $12z^5$ tiene una antiderivada en un dominio que contiene este camino,

$$\int_\gamma 12z^5 dz = 2z^6|_2^{2i} = 2(2i)^6 - 2(2)^6 = -2^8.$$

b. El cuadrado de vértices $2+2i$, $-2+2i$, $-2-2i$ y $2-2i$ encierra solamente uno de los ceros de la función $z(z^2+8)$, precisamente a $z=0$. Así, por la fórmula integral de Cauchy,

$$\oint_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2+8)} dz = 2\pi i \left[\frac{\cos z}{z^2+8}\right]_{z=0} = \frac{\pi i}{4}.$$

c. El círculo de radio $\frac{1}{2}$ centrado en el origen encierra solamente uno de los ceros de la función $z^2(z+1)^3$, precisamente a $z=0$. Así, por la fórmula integral de Cauchy,

$$\oint_\gamma \frac{e^z}{z^2(z+1)^3} dz = 2\pi i \left[\frac{d}{dz}\frac{e^z}{(z+1)^3}\right]_{z=0} = -4\pi i.$$

III.

a. La serie de potencias de $f_1(z) = \dfrac{z}{z^4+9}$, alrededor de $z=0$ se encuentra usando la serie geométrica:

$$\frac{z}{z^4+9} = \frac{1}{9}\frac{z}{1+\frac{z^4}{9}} = \frac{z}{9}\frac{1}{1-\left(\frac{-z^4}{9}\right)} = \frac{z}{9}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k z^{4k}}{9^k} = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k z^{4k+1}}{9^{k+1}},$$

y es válida siempre que $|\frac{z^4}{9}| < 1$, i.e. $|z| < \sqrt{3}$.

b. Usando la parte **c.** del punto **I**, la serie de potencias de $f_2(z) = \cos z$ alrededor de $z = \frac{\pi}{2}$ se consigue a partir de la de $\operatorname{sen} z$, i.e.

$$\cos z = -\operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = -\sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k\geq 0}(-1)^{k+1}\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

que es válida para todo z.

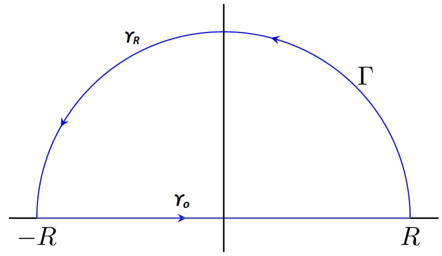
c. Finalmente, la serie de potencias de $f_3(z) = -\log\left(1-\frac{z^2}{2}\right)$ alrededor de $z=0$ se consigue observando que $\dfrac{d}{dz}f_3(z) = \dfrac{z}{1-\frac{z^2}{2}} = \displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{z^{2k+1}}{2^k}$, luego integrando esta serie de potencias obtenemos

$$-\log\left(1-\frac{z^2}{2}\right) = \sum_{k\geq 0}\frac{z^{2(k+1)}}{2^{k+1}(k+1),}$$

que es válida siempre que $|\frac{z^2}{2}| < 1$, i.e. $|z| < \sqrt{2}$.

IV.

a. Considere el camino cerrado $\Gamma = \gamma_o + \gamma_R$, orientado positivamente, donde γ_o es el intervalo $[-R, R]$ y $\gamma_R(t) = Re^{it}$ para $t \in [0, \pi]$ como se ilustra en la figura:



La función $f(z) = \dfrac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$ tiene polos simples en $z = \pm ib$ y, para $R > b$, solo uno de ellos queda encerrado por el contorno Γ. Así, por la fórmula de Cauchy

$$\oint_\Gamma \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}dz = 2\pi i \left[\frac{e^{iaz}}{z+ib}\right]_{z=ib} = \frac{\pi}{b}e^{-ab}.$$

b. Si consideramos la integral sobre $\gamma_R(t) = Re^{it}$, para $t \in [0,\pi]$ y $R > b$ lo suficientemente grande,

$$\left|\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\right| = \left|\frac{e^{iaR\cos t - aR\,\mathrm{sen}\, t}}{z^2+b^2}\right| \leq \frac{1}{z^2+b^2} \leq \frac{1}{||z|^2-b^2|} = \frac{1}{R^2-b^2},$$

luego $\left|\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\,dz\right| \leq \dfrac{\pi R}{R^2} = \dfrac{\pi}{R}$ y, entonces, $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\,dz = 0.$

c. Ahora, como $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}dz = \int_{\gamma_o} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}dz + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}dz = \frac{\pi}{b}e^{-ab}$, tenemos que

$$\lim_{R\to\infty}\oint_\Gamma \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+b^2}dx + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}dz = \frac{\pi}{b}e^{-ab},$$

es decir que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax + i\,\mathrm{sen}\, ax}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi}{b}e^{-ab}$. Como el resultado es un número real podemos concluir que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\, ax}{x^2+b^2}dx = 0$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi}{b}e^{-ab}$.