Solución - Tarea 1

Febrero 20, 2017

1

i

(1 pto)

"$\Rightarrow$"
Sea $z \in \mathbb{C}$ un numero real, entonces $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $z = x + 0i$. Entonces $\bar{z} = x - 0i$, así $z = \bar{z}$.

"$\Leftarrow$"
Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, tal que $z = \bar{z}$. Entonces $x = x$ y $y = -y$, entonces $y = 0$ y $z = x + 0i$, entonces $z \in \mathbb{R}$.

ii

(1 pto)

"$\Rightarrow$"
Si $z_1 = z_2 = 0$ es claro. Supongamos que $z_1, z_2 \neq 0$ y $z_1 = \alpha e^{i\theta}$, $z_2 = \alpha e^{i\phi}$. Note que se cumple $|z_1| = |z_2|$. Sean $w_1 = \beta e^{i\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)}$ y $w_2 = \frac{\alpha}{\beta} e^{i\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)}$, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Entonces

$$w_1 w_2 = \alpha e^{i\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)} e^{i\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)} = \alpha e^{i\theta} = z_1$$
$$w_1 \overline{w_2} = \alpha e^{i\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)} e^{-i\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)} = \alpha e^{i\phi} = z_2$$

"$\Leftarrow$"
Tenemos que $z_1 = w_1 w_2$ y $z_2 = w_1 \overline{w_2}$. Entonces $|z_1| = |w_1 w_2| = |w_1||w_2| = |w_1||\overline{w_2}| = |w_1 \overline{w_2}| = |z_2|$.

iii

(1 pto)

Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, tal que $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$. Entonces

$$\sqrt{x^2 + (y-4)^2} + \sqrt{x^2 + (y+4)^2} = 10$$

Elevando al cuadrado

$$x^2 + (y-4)^2 + x^2 + (y+4)^2 + 2\sqrt{x^2 + (y-4)^2}\sqrt{x^2 + (y+4)^2} = 100$$
$$2x^2 + 2y^2 + 32 + 2\sqrt{x^2 + (y-4)^2}\left(10 - \sqrt{x^2 + (y-4)^2}\right) = 100$$

$$16y + 20\sqrt{x^2 + (y-4)^2} = 100$$

Elevando al cuadrado

$$400x^2 + 144y^2 = 3600$$
$$25x^2 + 9y^2 = 225$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Esta ultima ecuación corresponde a una elipse en el plano.

iv

(1 pto)

Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, tal que $|z-1| = |z+i|$. Entonces

$$|z-1|^2 = |z+i|^2$$
$$(z-1)(\overline{z}-1) = (z+i)(\overline{z}-i)$$
$$|z|^2 - z - \overline{z} + 1 = |z|^2 - iz + i\overline{z} + 1$$
$$z + \overline{z} = iz - i\overline{z}$$

Como $z = x + iy$, nos queda

$$2x = -2y$$
$$x = -y$$

Esta ultima ecuación corresponde a una recta en el plano.

v

(1 pto)

Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, tal que $z^2 + \overline{z}^2 = 2$. Entonces

$$x^2 + 2xyi - y^2 + x^2 - 2xyi - y^2 = 2$$
$$2x^2 - 2y^2 = 2$$
$$x^2 - y^2 = 1$$

Esta ultima ecuación corresponde a una hipérbola en el plano.

vi

(2 ptos)

Considere $q(z) = (1-z)p(z) = \sum_{j=0}^{n-1} z^j - nz^n$. Note que si $k \in \mathbb{C}$ anula a $p(z)$, también anula a $q(z)$, es decir, toda raíz de $p(z)$ es raíz de $q(z)$. Sea $k \in \mathbb{C}$ una raíz de $p(z)$, entonces

$$q(k) = \sum_{j=0}^{n-1} k^j - nk^n = 0$$

$$nk^n = \sum_{j=0}^{n-1} k^j$$

Tomamos modulo en ambos lados

$$n|k|^n = \left|\sum_{j=0}^{n-1} k^j\right|$$

Por la desigualdad triangular

$$n|k|^n \leq \sum_{j=0}^{n-1} |k|^j$$

$$n|k|^n - \sum_{j=0}^{n-1} |k|^j \leq 0$$

$$(|k|^n - 1) + (|k|^n - |k|) + \cdots + (|k|^n - |k|^{n-1}) \leq 0$$

Suponga que $k > 1$, entonces $0 < (|k|^n - 1) + (|k|^n - |k|) + \cdots + (|k|^n - |k|^{n-1})$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $|k| \leq 1$, es decir, k esta dentro del disco de radio uno centrado en el origen en $\mathbb{C}$.

vii

(1 pto)

Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $e^{\overline{z}} = e^x e^{-iy} = e^x(\cos(-y) + i\sin(-y)) = e^x(\cos(y) - i\sin(y)) = e^x\overline{(\cos(y) + i\sin(y))} = \overline{e^x e^{iy}} = \overline{e^z}$

viii

(1 pto)

Sabemos que $\tan\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}$, si ponemos $\theta = \tan^{-1} z$ tenemos

$$z = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}$$

$$iz(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$$

$$e^{i\theta}(zi-1)+e^{-i\theta}(zi+1)=0$$
$$e^{2i\theta}(zi-1)+(zi+1)=0$$
$$e^{2i\theta}=\frac{1+zi}{1-zi}$$
$$\theta=\frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)$$

Como $\theta=\tan^{-1} z$

$$\tan^{-1} z=\frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)$$

2

i

(1 pto)

Queremos calcular las raíces de z^4+4, entonces

$$z^4+4=0$$
$$z^4=-4$$
$$z=(-4)^{\frac{1}{4}}$$
$$z=\left(4e^{i(\pi+2\pi k)}\right)^{\frac{1}{4}} \quad k\in\mathbb{N}:0\leq k\leq 3$$
$$z=\sqrt{2}e^{i(2k+1)\frac{\pi}{4}}$$

Entonces las raíces son: $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}},\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}},\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Y Estas raíces corresponden a: $1+i,-1+i,-1-i,1-i$.

ii

(1 pto)

Tenemos que $z^{n-1}=\overline{z}$, es decir, $z^n=|z|^2$. Si $n=1$, $z=1$. Ahora si $n\geq 2$, tenemos que

$$z^n=|z|^n e^{in\theta}=|z|^2e^{i2k\pi} \quad k\in\mathbb{N}:0\leq k\leq n-1$$

Por lo tanto, $|z|=1$ y $\theta=\frac{2k\pi}{n}$. Entonces son los $z\in\mathbb{C}$ tales que $z=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ y $k\in\mathbb{N}:0\leq k\leq n-1$.

iii

(1 pto)

Sabemos que $i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$con $k \in \mathbb{Z}$. Para simplificar las cuentas tomemos $k = 0$, entonces

$$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Así

$$i^{i^i} = e^{i^i \log i} = e^{e^{-\frac{\pi}{2}} \log\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$$

Entonces

$$i^{i^i} = \cos\left(\frac{\pi}{2e^{\frac{\pi}{2}}}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2e^{\frac{\pi}{2}}}\right)$$

iv

(1 pto)

$$\log\left(1+\sqrt{3}i\right) = \log\left(2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)}\right) = \log\left(2e^{i\frac{\pi}{3}(6k+1)}\right) = \log(2) + i\frac{\pi}{3}(6k+1), \quad k \in \mathbb{Z}$$