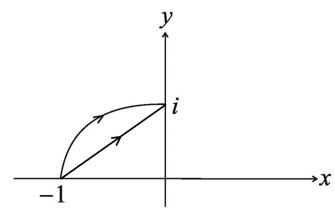
Cálculo en Variable Compleja

Solución Tarea 2

Abril 3 de 2017

1. Calcule las siguientes integrales entre los puntos -1 e i en el plano complejo, siguiendo los dos caminos indicados en la figura (el segmento de recta que une los dos puntos y el arco de circunferencia de radio uno que los conecta).



En cada caso diga si la integral es independiente del camino γ usado y explique claramente por qué.

i. $\displaystyle\int_\gamma |\,z\,|^2\ dz.$

Sol:

Definamos γ_1 el camino correspondiente al arco y γ_2 el camino correspondiente a la recta. Por lo tanto

$$\gamma_1(t) = e^{it} \qquad t \in [\pi, \pi/2] \qquad\qquad \gamma_2(t) = t + i(t+1) \qquad t \in [-1, 0]$$
$$\gamma_1^{'}(t) = ie^{it} \qquad\qquad \gamma_2^{'}(t) = 1 + i$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} |\,z\,|^2\ dz &= \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} |\gamma_1(t)|^2 \gamma_1^{'}(t)dt \\
&= \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} |e^{it}|^2 ie^{it}dt \\
&= \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} ie^{it}dt \\
&= e^{it}\Big|_\pi^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 1 + i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} |\,z\,|^2\ dz &= \int_{-1}^0 |\gamma_2(t)|^2 \gamma_2^{'}(t)dt \\
&= \int_{-1}^0 |t + i(t+1)|^2(1+i)dt \\
&= (1+i)\int_{-1}^0 t^2 + (t+1)^2 dt \\
&= \frac{1+i}{3}(t^3 + (t+1)^3)\Big|_{-1}^0 \\
&= \frac{2}{3}(1+i)
\end{aligned}$$

Dado que obtenemos resultados diferentes, la integral depende del camino.

ii. $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz.$

Sol:

Tomamos γ_1 y γ_2 como en i. Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2}\,dz &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\gamma_1(t)^2}\gamma_1^{'}(t)dt \\ &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(e^{it})^2} ie^{it}dt \\ &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} ie^{-it}dt \\ &= -e^{-it}\Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= i-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2}\,dz &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{\gamma_2(t)^2}\gamma_2^{'}(t)dt \\ &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{(t+i(t+1))^2}(1+i)dt \\ &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{(t+i(t+1))^2}(1+i)dt \\ &= -\frac{1}{(1+i)t+i}\Big|_{-1}^{0} \\ &= i-1\end{aligned}$$

La integral es independiente del camino dado que $\frac{1}{z^2}$ tiene primitiva $\left(\frac{1}{z}\right)$ y es continua en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

iii. $\displaystyle\int_{\gamma} \log z\,dz.$

Sol:

Tomamos γ_1 y γ_2 como en i. Además, tomamos la rama de log en $\mathbb{C}\setminus\{(0,\infty)\}$, para que log sea analítica y tenga primitiva. Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \log z\,dz &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\gamma_1(t)\right)\gamma_1^{'}(t)dt \\ &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \log\left(e^{it}\right) ie^{it}dt \\ &= -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} te^{it}dt \\ &\textit{Partes}: (m=t, dm=dt, n=-ie^{it}, dn=e^{it}) \\ &= ite^{it}\Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} - i\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} e^{it}dt \\ &= i\left(\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2i}} - \pi e^{\pi i}\right) - e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{\pi i} \\ &= -\frac{\pi}{2} + i\pi - i - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2}\,dz &= \int_{-1}^{0} \log\left(\gamma_2(t)\right)\gamma_2^{'}(t)dt \\ &= \int_{-1}^{0} \log\left(t+i(t+1)\right)(1+i)dt \\ &\textit{Sustituimos}: (u=t+i(t+1), du=(1+i)dt) \\ &= \int_{-1}^{i} \log(u)du \\ &= u\log(u)\Big|_{-1}^{i} - u\Big|_{-1}^{i} \\ &= i\log(i) + \log(-1) - i - 1 \\ &= -\frac{\pi}{2} + i\pi - i - 1\end{aligned}$$

La integral es independiente del camino dado que $\log z$ tiene primitiva $(z\log z - z)$ y es continua en $\mathbb{C}\setminus\{(0,\infty)\}$.

2. Calcule la integral $\displaystyle\oint_{\gamma} \frac{z+6}{z^2-4}dz$, siguiendo los caminos indicados:

i. γ es el círculo de radio 1 centrado en el origen.

Sol:

Tenemos que $D = \{z : |z| \leq 1\}$ es el dominio, es claro que $\frac{z+6}{z^2-4} = \frac{z+6}{(z-2)(z+2)}$ es analítica en D dado que para todo z en D, $z \neq 2$ y $z \neq -2$. Tambien tenemos que $\partial D = \gamma$, entonces por la fórmula integral de Cauchy

$$\int_\gamma \frac{z+6}{z^2-4} dz = \int_\gamma \frac{z+6}{(z-2)(z+2)} = 0$$

ii. γ es el círculo de radio 1 centrado en $z = 2$.

Sol:

Tenemos que $D = \{z : |z-2| \leq 1\}$ es el dominio, es claro que $\frac{z+6}{z^2-4} = \frac{z+6}{(z-2)(z+2)}$ es analítica en D dado que para todo z en D, $z \neq -2$. Tambien tenemos que $\partial D = \gamma$, entonces por la fórmula integral de Cauchy

$$\int_\gamma \frac{z+6}{z^2-4} dz = \int_\gamma \frac{z+6}{(z-2)(z+2)} = 2\pi i \frac{z+6}{z+2}\bigg|_{z=2} = 4\pi i$$

iii. γ es el círculo de radio 1 centrado en $z = -2$.

Sol:

Tenemos que $D = \{z : |z+2| \leq 1\}$ es el dominio, es claro que $\frac{z+6}{z^2-4} = \frac{z+6}{(z-2)(z+2)}$ es analítica en D dado que para todo z en D, $z \neq 2$. También tenemos que $\partial D = \gamma$, entonces por la fórmula integral de Cauchy

$$\int_\gamma \frac{z+6}{z^2-4} dz = \int_\gamma \frac{z+6}{(z-2)(z+2)} = 2\pi i \frac{z+6}{z-2}\bigg|_{z=-2} = -2\pi i$$

3. Calcule las siguientes integrales:

i. $\oint_\gamma \frac{z+\cos(\pi z)}{z(z^2+1)} dz$, donde γ es el círculo de radio 2 centrado en el origen.

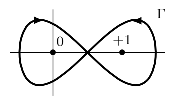
Sol:

$$\oint_\gamma \frac{z+\cos(\pi z)}{z(z^2+1)} dz = \oint_\gamma \frac{z+\cos(\pi z)}{z(z+i)(z-i)} dz$$

Como todos los polos $(0, -i, i)$ están dentro del disco de radio 2, por la fórmula integral de Cauchy

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \frac{z+\cos(\pi z)}{z(z+i)(z-i)} dz =& 2\pi i \left[\frac{z+\cos(\pi z)}{(z+i)(z-i)}\bigg|_{z=0} + \frac{z+\cos(\pi z)}{z(z-i)}\bigg|_{z=-i} + \frac{z+\cos(\pi z)}{z(z+i)}\bigg|_{z=i} \right] \\
=& 2\pi i \left[1 + \frac{-i+\cos(\pi i)}{-2} + \frac{i+\cos(\pi i)}{-2} \right] \\
=& 2\pi i \left[1 + \frac{i}{2} - \frac{\cos(\pi i)}{2} - \frac{i}{2} - \frac{\cos(\pi i)}{2} \right] \\
=& 2\pi i \left[1 - \cos(\pi i) \right] = 2\pi i \left[1 - \cosh(\pi) \right]
\end{aligned}$$

ii. $\oint_{\Gamma} \frac{2z+1}{z(z-1)^2} dz$, donde Γ es el contorno indicado en la figura:



Sol:

Note que podemos cambiar Γ por $\gamma_1 \cup \gamma_2$, donde γ_1 es un camino cerrado que encierra a 1 (puede ser un círculo) y γ_2 es un camino cerrado que encierra a 0 (puede ser un círculo), por lo tanto

$$\oint_{\Gamma} \frac{2z+1}{z(z-1)^2} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{2z+1}{z(z-1)^2} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{2z+1}{z(z-1)^2} dz$$

Como $\frac{2z+1}{z(z-1)^2}$ es analítica en γ_1, y γ_1 encierra a 1, entonces por la fórmula integral de Cauchy

$$\oint_{\gamma_1} \frac{2z+1}{z(z-1)^2} dz = 2\pi i \left[\frac{d}{dz} \frac{2z+1}{z} \bigg|_{z=1} \right] = 2\pi i \left[-\frac{1}{z^2} \bigg|_{z=1} \right] = -2\pi i$$

Como $\frac{2z+1}{z(z-1)^2}$ es analítica en γ_2, y γ_2 encierra a 0, entonces por la fórmula integral de Cauchy

$$\oint_{\gamma_2} \frac{2z+1}{z(z-1)^2} dz = -\oint_{\bar{\gamma_2}} \frac{2z+1}{z(z-1)^2} dz = -2\pi i \frac{2z+1}{(z-1)^2} \bigg|_{z=0} = -2\pi i$$

Entonces

$$\oint_{\Gamma} \frac{2z+1}{z(z-1)^2} dz = -2\pi i - 2\pi i = -4\pi i$$

iii. $\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 - 2z} dz$, donde γ es el círculo de radio 4 centrado en el origen.

Sol:

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 - 2z} dz = \oint_{\gamma} \frac{e^z}{z(z-2)}$$

Como los polos $(0, 2)$ están encerrados por γ y $\frac{e^z}{z}$, $\frac{e^z}{z-2}$ son analíticas en γ, por la fórmula integral de Cauchy

$$\oint_\gamma \frac{e^z}{z(z-2)} = 2\pi i \frac{e^z}{z-2}\bigg|_{z=0} + 2\pi i \frac{e^z}{z}\bigg|_{z=2} = -\pi i + \pi i e^2 = \pi i(e^2-1)$$

4.

i. Encuentre una cota superior para $\oint_\gamma \frac{e^z}{z^2+1}dz$, donde γ es el círculo de radio 2 centrado en el origen.

Sol:

Como γ es suave y $\frac{e^z}{z^2+1}$ es continua sobre γ, tenemos que

$$\left|\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1}dz\right| \le \oint_{|z|=2} \left|\frac{e^z}{z^2+1}\right||dz| = ML$$

Donde M es un número real tal que $\left|\frac{e^z}{z^2+1}\right| \le M$ y L es la longitud de la curva γ, por lo tanto $L = 2\pi(2) = 4\pi$. Primero acotemos $|e^z|$.

$$|e^z| = \left|e^x e^{iy}\right| = |e^x[\cos(y) + i\sin(y)]| = e^x[\cos^2(y) + \sin^2(y)]^{1/2} = e^x$$

Como γ es el círculo de radio 2 centrado en el origen, la ecuación de este círculo es $x^2 + y^2 = 4$, y el valor máximo de x sucede cuando $y = 0$, entonces $x = \pm 2$, así que $x \le 2$ y $|e^z| \le e^2$. Ahora acotemos $\left|z^2+1\right|$. Sabemos que

$$|z_1 + z_2| \ge ||z_1| - |z_2|| \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Aplicado a nuestro caso, nos queda

$$|z^2+1| \ge ||z|^2 - |1|| = |2^2 - 1| = |3| = 3$$

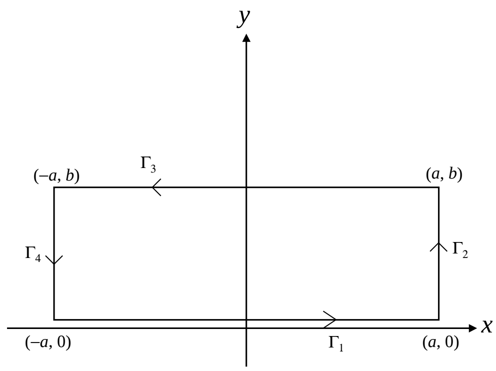
Entonces

$$\frac{1}{|z^2+1|} \le \frac{1}{3}$$

Por lo tanto

$$\left|\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1}dz\right| \le \frac{4\pi e^2}{3}$$

ii. Considere la integral $\oint_\Gamma e^{-z^2} dz$, donde Γ es el contorno rectangular con vértices $\pm a$, $\pm a + ib$ que se ilustra en le figura.



Fijando b y tomando el límite $a \to \infty$, demuestre que $\oint_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz \to 0$ y $\oint_{\Gamma_4} e^{-z^2} dz \to 0$, luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{\pm 2ibx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = e^{-b^2} \sqrt{\pi}.$$

Sol:

Como e^{-z^2} es analítica en $\mathbb{C}$, tenemos que $e^{-z^2} dz$ es una forma cerrada. Entonces $\oint_\Gamma e^{-z^2} dz = 0$. Además tenemos que

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1(t) = t \quad t \in [-a, a] && \Gamma_1^{'}(t) = 1 \\
&\Gamma_2(t) = a + it \quad \in [0, b] && \Gamma_2^{'}(t) = i \\
&\overline{\Gamma_3}(t) = t + ib \quad t \in [-a, a] && \overline{\Gamma_3}^{'}(t) = 1 \\
&\overline{\Gamma_4}(t) = -a + it \quad \in [0, b] && \overline{\Gamma_3}^{'}(t) = i
\end{aligned}$$

Entonces

$$\oint_\Gamma e^{-z^2} dz = \int_{\Gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_3} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_4} e^{-z^2} dz = 0$$

Para Γ_2 y Γ_4

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_2} e^{-z^2}dz\right| &\leq \int_{\Gamma_2} \left|e^{-z^2}\right|dz \\
&= \int_0^b \left|e^{-(a+it)^2}i\right| dt \\
&= \int_0^b \left|e^{t^2-a^2-2iat}\right| |i|dt \\
&= \int_0^b \left|e^{t^2-a^2}e^{-2iat}\right| dt \\
&= \int_0^b \left|e^{t^2-a^2}\right| \left|e^{-2iat}\right| dt \\
&= \int_0^b \left|e^{t^2-a^2}\right| dt \\
&= \int_0^b e^{t^2-a^2}dt \\
&= e^{-a^2}\int_0^b e^{t^2}dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_4} e^{-z^2}dz\right| &= \left|\int_{\overline{\Gamma_4}} e^{-z^2}dz\right| \\
&\leq \int_0^b \left|e^{-(-a+it)^2}i\right| dt \\
&= \int_0^b \left|e^{t^2-a^2+2iat}\right| |i|dt \\
&= \int_0^b \left|e^{t^2-a^2}e^{2iat}\right| dt \\
&= \int_0^b \left|e^{t^2-a^2}\right| \left|e^{2iat}\right| dt \\
&= \int_0^b \left|e^{t^2-a^2}\right| dt \\
&= \int_0^b e^{t^2-a^2}dt \\
&= e^{-a^2}\int_0^b e^{t^2}dt
\end{aligned}$$

Como b esta fijo, $\displaystyle\int_0^b e^{t^2}dt$ es finita, entonces

$$\lim_{a\to\infty}\left|\int_{\Gamma_2} e^{-z^2}dz\right| = \lim_{a\to\infty}\left|\int_{\Gamma_4} e^{-z^2}dz\right| \leq \lim_{a\to\infty}\left[e^{-a^2}\int_0^b e^{t^2}dt\right] = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{a\to\infty}\int_{\Gamma_2} e^{-z^2}dz = \lim_{a\to\infty}\int_{\Gamma_4} e^{-z^2}dz = 0$$

Ahora tomamos el límite cuando $a\to\infty$ en $\displaystyle\oint_{\Gamma} e^{-z^2}dz$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{a\to\infty} \oint_{\Gamma} e^{-z^2}dz = \lim_{a\to\infty}\left[\int_{\Gamma_1} e^{-z^2}dz + \int_{\Gamma_2} e^{-z^2}dz + \int_{\Gamma_3} e^{-z^2}dz + \int_{\Gamma_4} e^{-z^2}dz\right] = 0\\
&\lim_{a\to\infty}\left[\int_{\Gamma_1} e^{-z^2}dz + \int_{\Gamma_3} e^{-z^2}dz\right] = 0\\
&\lim_{a\to\infty}\left[\int_{\Gamma_1} e^{-z^2}dz - \int_{\overline{\Gamma_3}} e^{-z^2}dz\right] = 0\\
&\lim_{a\to\infty}\int_{\overline{\Gamma_3}} e^{-z^2}dz = \lim_{a\to\infty}\int_{\Gamma_1} e^{-z^2}dz\\
&\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} e^{-(t+ib)^2}dt = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} e^{-t^2}dt\\
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{b^2-t^2-2ibt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt\\
&e^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cos(2bt)dt - ie^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\sin(2bt)dt = \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

Tomamos la parte real

$$
\begin{aligned}
e^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cos(2bt)dt = \sqrt{\pi}\\
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cos(2bt)dt = e^{-b^2}\sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

iii. Considere la función definida por $f(z) = \oint_{\gamma} \frac{3w^2+7w+1}{w-z}dw$, donde γ es el círculo de radio 3 centrado en el origen. Use la fórmula integral de Cauchy para calcular $f'(1+i)$.

Sol:

Derivamos la función $f(z)$

$$
\begin{aligned}
f^{'}(z) =& \frac{d}{dz}\left[\oint_{\gamma} \frac{3w^2+7w+1}{w-z}dw\right]\\
=& \oint_{\gamma} \frac{d}{dz}\left[\frac{3w^2+7w+1}{w-z}\right]dw\\
=& \oint_{\gamma} \frac{3w^2+7w+1}{(w-z)^2}dw\\
=& \oint_{\gamma} \frac{3(w-z)^2+6wz-3z^2+7w+1}{(w-z)^2}dw\\
=& \oint_{\gamma} \frac{3(w-z)^2+(6z+7)(w-z)+3z^2+7z+1}{(w-z)^2}dw\\
=&3\oint_{\gamma} dw + (6z+7)\oint_{\gamma}\frac{dw}{w-z} + (3z^2+7z+1)\oint_{\gamma}\frac{dw}{(w-z)^2}
\end{aligned}
$$

Como 1 y $\dfrac{1}{(w-z)^2}$ son analíticas en el círculo de radio 3 centrado en el origen, tenemos que: $3\oint_\gamma dw = 0$ y $(3z^2+7z+1)\oint_\gamma \dfrac{dw}{(w-z)^2} = 0$, entonces

$$f^{'}(z) = (6z+7)\oint_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

Por la fórmula integral de Cauchy

$$f^{'}(z) = 2\pi i(6z+7)$$

Evaluando $f^{'}(z)$ en $1+i$ obtenemos

$$f^{'}(1+i) = 2\pi i(6(1+i)+7) = 26\pi i - 12\pi$$

iv. Encuentre el punto del dominio $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ en el que el polinomio $p(z) = z^2+3z-1$ alcanza su módulo máximo.

Sol:

Como p(z) es analítica en D, por el principio del Módulo Máximo, $|p(z)|$ es máximo en $z \in \partial D$. Es decir, un punto en la circunferencia de radio 1. Por lo tanto z es de la forma e^{it}, entonces evaluando en e^{it}

$$\begin{aligned}
|p\left(e^{it}\right)| &= \left|e^{2it}+3e^{it}-1\right| \\
&= |\{\cos(2t)+3\cos(t)-1\} + i\{\sin(2t)+3\sin(t)\}| \\
&= \left(\{\cos(2t)+3\cos(t)-1\}^2 + \{\sin(2t)+3\sin(t)\}^2\right)^{1/2} \\
&= [11-2\cos(2t)]^{1/2}
\end{aligned}$$

$[11-2\cos(2t)]^{1/2}$ tiene su máximo valor en $t = \pm\frac{\pi}{2}$. Entonces $z = e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$. Por lo tanto $p(z)$ alcanza su módulo máximo en $z = \pm i$.

v. Demuestre que si $f(z)$ es entera y $\frac{f(z)}{z^n}$ es acotada para $|z| \geq R$ entonces $f(z)$ es un polinomio de grado menor o igual a n.

Sol:

Como $\frac{f(z)}{z^n}$ es cotada para $|z| \geq R$, existe M un número real tal que

$$|f(z)| \leq M|z|^n \quad \text{para} \quad |z| \geq R$$

Como f es entera, cumple la desigualdad de Cauchy. Entonces

$$|a_m|r^m \leq M(r) \quad \text{para} \quad m \geq 0$$

Donde $M(r)$ denota la cota superior de $|f(z)|$ para $|z| = r$. Si consideramos r's tales que $R \geq r$, es decir, para $|z| \geq R$, tenemos que $M(r) = M|z|^n$ dado que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para $|z| \geq R$. Entonces

$$|a_m|R^m \leq M|z|^n \quad \text{para} \quad |z| \geq R$$

Entonces

$$|a_m| \leq \frac{M|z|^n}{R^m} \quad \text{para} \quad |z| \geq R$$

Si consideramos $m > n$ (n es fijo) y hacemos tender R a infinito, obtenemos que los a_m van a ser iguales a 0 ya que R^m crecería más que $|z|^n$, esto para $m > n$. Entonces nos queda que $f(z)$ es un polinomio con grado máximo n.