

Geometría Riemanniana

Primer Semestre 2013

Alexander Cardona

La geometría Riemanniana ha sido una de las áreas más importantes de las matemáticas desde su inicio, durante el siglo XIX, y sus aplicaciones en física teórica (en relatividad general, en particular) revolucionaron nuestra concepción del mundo. El curso que se presenta a continuación tiene como objetivo introducir las ideas fundamentales y las herramientas básicas de la geometría Riemanniana, presentando al mismo tiempo los resultados más importantes en el área y algunas de sus aplicaciones (clásicas y recientes) en el estudio de la topología de variedades diferenciales. El texto guía será [4], aunque [2], [3], [5], [6] y [7] servirán de soporte para la introducción y algunas de las aplicaciones estudiadas en las partes finales del programa que se esboza a continuación. Una muy buena referencia “general” que abarca la historia, los resultados principales y algunas aplicaciones de la geometría Riemanniana hasta años recientes es [1], el texto [3] será utilizado eventualmente como fuente de ejercicios.

- 1. [2 Semanas]. Cálculo en variedades.** Variedades diferenciales, subvariedades, el haz tangente y campos vectoriales. *Capítulos 2 a 4 en [5], capítulos I.A a I.C en [4].* Tarea 1.
- 2. [3 Semanas]. Haces vectoriales y grupos de Lie.** Haces vectoriales, secciones, tensores y formas diferenciales. Grupos y álgebras de Lie. *Capítulos 2 a 3 en [7], capítulos I.D a I.G en [4].* Parcial 1.
- 3. [3 Semanas]. Variedades Riemannianas.** Definición y teoremas de existencia. Conexiones, geodésicas y transporte paralelo. *Capítulos 5 a 7 en [5], capítulos II.A a II.C en [4].* Tarea 2.
- 4. [2 Semanas]. Curvatura Riemanniana.** Tensor de curvatura, campos de Jacobi y la aplicación exponencial. Aplicaciones. *Capítulos 8 y 9 en [5], capítulos III.A a III.C en [4].* Parcial 2.
- 5. [2 Semanas]. Topología, curvatura y volumen.** Densidades y medidas en variedades Riemannianas, estimativos de volúmenes. Teoremas de comparación y aplicaciones. *Capítulo 2 en [2], capítulo III en [4].* Tarea 3.

6. [3 Semanas]. El operador Laplaciano y geometría espectral. El espectro del operador Laplaciano sobre una variedad Riemanniana, el método de Bochner y aplicaciones a la topología. La ecuación del calor y la fórmula de Weyl. *Capítulo IV en [4].* Parcial 3.

Evaluación. Tres parciales 15% c/u, tres tareas 10% c/u y un examen final 25%.

References

- [1] Berger, M. *A panoramic view of Riemannian geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [2] Chavel, I. *Riemannian geometry. A modern introduction*. Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **98**. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [3] Do Carmo, M. *Riemannian geometry*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.
- [4] Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J. *Riemannian geometry*. Third edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [5] Gudmundsson, S. *An introduction to Riemannian geometry*. Lecture notes available in the webpage of the author: <http://www.matematik.lu.se/matematiklu/personal/sigma/>.
- [6] Taubes, C.H. *Differential Geometry: Bundles, Metrics, Connections and Curvature*. Oxford University Press, 2011.
- [7] Warner, F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Springer-Verlag, 1983.