Fundamentos de Matemáticas – Examen Final

Junio 10 de 2009

I Cálculo Diferencial e Integral

1. Los siguientes límites de la función $f(x) = \frac{1-\cos^2 x}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to \pi} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}$$

son, respectivamente:

i. $-1, \quad \frac{4}{\pi^2}, \quad 0.$
ii. $1, \quad \frac{4}{\pi^2}, \quad 0.$
iii. $-1, \quad \frac{2}{\pi}, \quad 0.$
iv. $1, \quad \frac{4}{\pi^2}, \quad -1.$
v. $-1, \quad \frac{2}{\pi}, \quad 1.$

Respuesta: ii.

2. Si un ahorro de 200 dólares se paga a un interés del 5% anual, en cuánto tiempo el ahorro se habrá convertido en 500 dólares:

i. Un año.
ii. Diez años.
iii. Quince años.
iv. Más de 15 años.

Respuesta: iv.

3. Las derivadas de las siguientes funciones

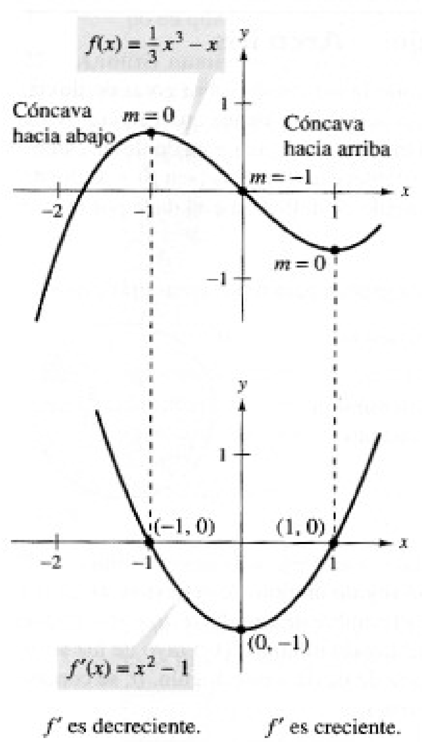
$$x^4 - 3x^2, \qquad e^{-x^2}, \qquad \frac{1}{\cos x}, \qquad \frac{1}{2}x - \cos x.$$

son, respectivamente:

i.	$4x^3 - 6x,$	$-2x^2e^{-x^2},$	$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x},$	$\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x.$
ii.	$-4x^3 + 6x,$	$-2xe^{-x^2},$	$-\frac{1}{\operatorname{sen} x},$	$\frac{1}{2} + \operatorname{sen} x.$
iii.	$4x^3 - 6x,$	$-2xe^{-x^2},$	$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x},$	$\frac{1}{2} + \operatorname{sen} x.$
iv.	$4x^3 - 6x,$	$-2x^2e^{-x^2},$	$\ln \cos x,$	$\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x.$
v.	$4x^3 - 6x,$	$-\frac{e^{-x^2}}{2x},$	$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x},$	$\frac{1}{2} + \operatorname{sen} x.$

Respuesta: iii.

4. Considere la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$.
   i. Encuentre las coordenadas de los máximos y mínimos de f.
   ii. Encuentre las coordenadas de los puntos de inflexión de f.
   iii. Determine los intervalos en los cuales la función es creciente y decreciente. Haga un boceto de la gráfica de f.



5. Las antiderivadas de las siguientes funciones

$$2xe^{-x^2}, \qquad 2x^{\frac{3}{2}} - 1, \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \qquad -\ln x.$$

son, respectivamente:

i.	$e^{-x^2} + C,$	$\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - x + C,$	$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + C,$	$\frac{1}{x} + C.$
ii.	$-e^{-x^2} + C,$	$\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - x + C,$	$-\ln(\cos x) + C,$	$-\ln(\ln x) + C.$
iii.	$e^{-x^2} + C,$	$\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + x + C,$	$-\ln(\cos^2 x) + C,$	$-\frac{1}{x} + C.$
iv.	$-e^{-x^2} + C,$	$\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - x + C,$	$-\ln(\cos x) + C,$	$-\frac{1}{x} + C.$
v.	$e^{-x^2} + C,$	$\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - x + C,$	$\ln(\cos x) + C,$	$\frac{1}{x} + C.$

Respuesta: ii. o iv. (la última opción es incorrecta en todos los resultados).

6. El valor de la integral

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) dx$$

es

i. 2 ii. 0 iii. $-\dfrac{5}{6}$ iv. $\sqrt{2}\pi$ v. Nunguno de los anteriores.

Respuesta: ii.

II Álgebra Lineal

1. El sistema de ecuaciones lineales en tres incógnitas

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 & = 0 \end{array}\right.$$

i. Es inconsistente
ii. Tiene como única solución $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$
iii. Tiene infinitas soluciones
iv. Tiene como única solución $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$.

Respuesta: iv.

2. El rango de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es, respectivamente:

i. $1, 2$ y 3 ii. $2, 1$ y 3 iii. $2, 1$ y 2 iv. $2, 2$ y 2.

Respuesta: iii.

3. El determinante de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es, respectivamente:

i. $4, 2$ y 3 ii. $4, 1$ y 1 iii. $4, 0$ y -1 iv. $4, 0$ y 1.

Respuesta: iii.

4. Diga cuál afirmación es cierta sobre los siguientes vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = (-1, 1, 0) \ , \quad \vec{v}_2 = (0, -1, 1) \ , \ \vec{v}_3 = (-1, 0, 1).$$

i. Los tres vectores son independientes.
ii. $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son perpendiculares.
iii. $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son independientes.
iv. $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son perpendiculares.

Respuesta: iii.

5. Los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ son:

i. $1, 2$ y 3 ii. $2, 2$ y -2 iii. $2, -2$ y -2 iv. $2, 2$ y 2.

Respuesta: iii.

III Cálculo Vectorial

1. Las derivadas parciales de la función $f(x,y,z) = x^3 + y^3 - 2xz$ son:

   i. $3x^2 - 2z,\ 3y^2$ y $-2x$ ii. $3x^2,\ 3y^2$ y $-2x$

   iii. $3x^2 - 2z,\ -3y^2$ y $2x$ iv. $3x^2,\ 3y^2$ y 0.

   Respuesta: i.

2. Las dirección de máximo crecimiento de la función $f(x,y,z) = x^3 + y^3 - 2xz$ en el punto $(1,1,1)$ es:

   i. $(1,3,-2)$ ii. $(3,3,-2)$ iii. $(3,-3,2)$ iv. $(3,3,0)$.

   Respuesta: i.

3. El máximo de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre la recta $2x + y = 1$ se encuentra en el punto:

   i. $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ ii. $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ iii. $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ iv. $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

   Respuesta: iii.

4. Un fabricante de refrescos desea empacar un volumen fijo V_o de refresco, en un empaque con base cuadrada de lado a y lados rectangulares de altura h, optimizando el área de material empleada para almacenar tal volumen. Cuales son las dimensiones del empaque que minimizan el área que encierra tal volumen?

   Respuesta: Las dimensiones que minimizan el área que encierra el volumen dado son las de un cubo: $a = h$.