

Curso 2003/04

Fecha de entrega: 14/10/03.

Responder a las siguientes cuestiones:

1. Sean (X, T) un espacio topológico y A, B dos subconjuntos de X tales que $A \subseteq B \subseteq X$. Probar:
 - (a) $(T|_B)|_A = T|_A$.
 - (b) Si $A \in T$, entonces $A \in T|_B$.
 - (c) El recíproco de (b) no es cierto en general, pero sí cuando B es abierto (es decir, si $A \in T|_B$ y $B \in T$, entonces $A \in T$).

SOLUCIÓN: (a) Como $T|_B = \{G \cap B / G \in T\}$, se tiene que:

$$(T|_B)|_A = \{G \cap B \cap A / G \in T\} = \{G \cap A / G \in T\} = T|_A.$$

(b) Como $A \subseteq B$, puede escribirse $A = A \cap B \in T|_B$, de acuerdo con la definición de $T|_B$, pues $A \in T$.

(c) Por ejemplo, sean $X = \mathbf{R}$, $T = T_e$ la topología euclídea sobre \mathbf{R} , $B = [0, 2]$ y $A = (1, 2]$. Está claro que $A \in T|_B$, pues $A = (1, 3) \cap B$ y $(1, 3) \in T$, pero $A \notin T$.

Por otra parte, si $A \in T|_B$, existe $G \in T$ tal que $A = G \cap B$. Así, si $B \in T$, entonces $A \in T$, pues se obtiene como intersección de dos abiertos de T . \square

2. Probar que un conjunto es abierto si y sólo si es entorno de todos sus puntos. Utilizar esta caracterización para probar que $[0, 1)$ no es abierto euclídeo de \mathbf{R} .

SOLUCIÓN: Trivialmente, un abierto es entorno de todos sus puntos. Recíprocamente, consideremos un espacio topológico (X, T) y un conjunto $G \subseteq X$ tal que es entorno de todos sus puntos. Entonces, para cada $x \in G$ existe $U_x \in T$ tal que $x \in U_x \subseteq G$. Así, se comprueba fácilmente que

$$G = \bigcup_{x \in G} U_x,$$

por lo que G es abierto al obtenerse como unión de abiertos.

El conjunto $[0, 1)$ no es abierto euclídeo de \mathbf{R} pues no es entorno de uno de sus puntos, el 0, dado que es imposible encontrar un abierto euclídeo de \mathbf{R} que contenga al 0 y esté contenido en $[0, 1)$. \square

3. Sean (X, T) un espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq T$. Probar que \mathcal{B} es base de T si y sólo si $\forall G \in T$ y $\forall p \in G$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B \subseteq G$.

SOLUCIÓN: Supongamos que \mathcal{B} es base de T . Entonces, dado $G \in T$ cualquiera, existe $\{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $G = \cup_{i \in I} B_i$. Así, dado $p \in G$ cualquiera, existe $i_0 \in I$ tal que $p \in B_{i_0}$. Además, $B_{i_0} \subseteq G$, pues es uno de los conjuntos de la unión anterior.

Recíprocamente, todo abierto de T puede obtenerse como unión de elementos de \mathcal{B} . En efecto, dados $G \in T$ y $p \in G$ cualesquiera, denotamos por B_p un elemento de \mathcal{B} tal que $p \in B_p \subseteq G$ (B_p existe por hipótesis). Así, es fácil comprobar que $G = \cup_{p \in G} B_p$. \square

4. Sean X un conjunto y Ω una familia de subconjuntos de X . Sean $\mathcal{B}_\Omega = \{X\} \cup \{\text{intersecciones finitas de elementos de } \Omega\}$ y $T_\Omega = \{\emptyset\} \cup \{\text{uniones cualesquiera de elementos de } \mathcal{B}_\Omega\}$. Probar que T_Ω es la menor topología sobre X que contiene a Ω . Probar también que \mathcal{B}_Ω es base de T_Ω .

SOLUCIÓN: En primer lugar, observemos que, por definición, $\Omega \subseteq \mathcal{B}_\Omega \subseteq T_\Omega$. En particular, $\emptyset, X \in T_\Omega$. Por otra parte, la intersección de dos elementos de T_Ω es un elemento de T_Ω , puesto que

$$\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (B_i \cap B_j)$$

y la intersección de dos elementos de \mathcal{B}_Ω es un elemento de \mathcal{B}_Ω . En cuanto a la unión de elementos de T_Ω , es inmediato observar que las uniones de uniones de elementos de \mathcal{B}_Ω son elementos de T_Ω . Por lo tanto, T_Ω es una topología sobre X que contiene a Ω . Además, \mathcal{B}_Ω es base de esta topología por definición de la misma.

Con respecto al hecho de ser T_Ω la menor topología que contiene a Ω , se obtiene de manera inmediata teniendo en cuenta que las intersecciones finitas y las uniones arbitrarias son operaciones cerradas para cualquier topología. Es decir, si T fuera otra topología tal que $\Omega \subseteq T$, es inmediato deducir que $T_\Omega \subseteq T$, sin más que realizar las construcciones indicadas en el enunciado. \square

5. Sean $(X, T_X), (Y, T_Y)$ dos espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación biyectiva. Probar que son equivalentes:

- (a) f^{-1} es continua.
- (b) f es abierta.
- (c) f es cerrada.

(Ayuda: recordar que $f^{-1}(Y \setminus G) = X \setminus f^{-1}(G)$, $\forall G \subseteq Y$). Utilizar este resultado para caracterizar los homeomorfismos.

SOLUCIÓN: Basta observar que, dado $G \subseteq X$ cualquiera, $f(G) = (f^{-1})^{-1}(G)$.

Así, teniendo en cuenta que una aplicación es continua si y sólo si la imagen inversa de un abierto es abierto, se prueba la equivalencia entre (a) y (b). Por otra parte, utilizando la ayuda se deduce una caracterización análoga de la continuidad empleando cerrados, por lo que la igualdad anterior también prueba la equivalencia entre (a) y (c).

Como consecuencia, se deduce que una aplicación es un homeomorfismo si y sólo si es biyectiva, continua y abierta (o cerrada). \square

6. Sean (X, T_X) un espacio topológico y $f : (X, T_X) \rightarrow Y$ una aplicación biyectiva. Probar que $T_Y = \{f(G) / G \in T_X\}$ coincide con la topología final de f (es decir, $\{U \subseteq Y / f^{-1}(U) \in T_X\}$) y es la única topología sobre Y que convierte a f en un homeomorfismo.

SOLUCIÓN: Utilizando la biyectividad de f , se tiene de manera inmediata que $T_Y = \{U \subseteq Y / f^{-1}(U) \in T_X\}$, de donde se deduce que T_Y es una topología sobre Y que hace a f continua. Para ver que f es un homeomorfismo, bastará probar que es abierta, lo cual se obtiene trivialmente de la definición de T_Y . En cuanto a la unicidad, consideremos una topología T sobre Y que convierta a f en un homeomorfismo, y veamos que $T = T_Y$. En efecto, dado $U \in T$ cualquiera, al ser $f : (X, T_X) \rightarrow (Y, T)$ continua, $f^{-1}(U) \in T_X$, lo cual implica que $U \in T_Y$. Recíprocamente, dado $U \in T_Y$ cualquiera, se tiene que $f^{-1}(U) \in T_X$ y $U = f(f^{-1}(U)) \in T$, al ser $f : (X, T_X) \rightarrow (Y, T)$ abierta. \square

7. Sean (Y, T_Y) un espacio topológico y $f : X \rightarrow (Y, T_Y)$ una aplicación biyectiva. Probar que $T_X = \{G \subseteq X / f(G) \in T_Y\}$ coincide con la topología inicial de f (es decir, $\{f^{-1}(U) / U \in T_Y\}$) y es la única topología sobre X que convierte a f en un homeomorfismo.

SOLUCIÓN: Utilizando la biyectividad de f , se tiene de manera inmediata que $T_X = \{f^{-1}(U) / U \in T_Y\}$, de donde se deduce que T_X es una topología sobre X que hace a f continua. Para ver que f es un homeomorfismo, bastará probar que es abierta, lo cual se obtiene trivialmente de la definición de T_X . En cuanto a la unicidad, consideremos una topología T sobre X que convierta a f en un homeomorfismo, y veamos que $T = T_X$. En efecto, dado $G \in T$ cualquiera, al ser $f : (X, T) \rightarrow (Y, T_Y)$ abierta, $f(G) \in T_Y$, lo cual implica que $G \in T_X$. Recíprocamente, dado $G \in T_X$ cualquiera, se tiene que $f(G) \in T_Y$ y $G = f^{-1}(f(G)) \in T$, al ser $f : (X, T) \rightarrow (Y, T_Y)$ continua. \square

8. Probar que todo homeomorfismo local es una aplicación abierta.

SOLUCIÓN: Sea $f : (X, T_X) \rightarrow (Y, T_Y)$ un homeomorfismo local. Por definición, para cada $x \in X$ existe un entorno abierto $U_x \in T_X$ de x tal que $f(U_x) \in T_Y$ y $f|_{U_x} : U_x \rightarrow f(U_x)$ es homeomorfismo.

Para probar que f es una aplicación abierta, tomamos un abierto cualquiera $G \in T_X$ y probamos que $f(G) \in T_Y$. Ahora bien,

$$G = \bigcup_{x \in G} (G \cap U_x),$$

de donde:

$$f(G) = f\left(\bigcup_{x \in G} (G \cap U_x)\right) = \bigcup_{x \in G} f(G \cap U_x).$$

Como $G \in T_X$, para cada $x \in G$, $G \cap U_x$ es abierto en U_x , por lo que $f(G \cap U_x)$ será abierto en $f(U_x)$ (pues $f|_{U_x}$ es abierta, al ser homeomorfismo). Aplicando el apartado (b) de la Cuestión 1, se deduce que cada $f(G \cap U_x) \in T_Y$, lo cual implica que $f(G)$ es abierto al obtenerse como unión de abiertos. \square

Nota importante: En las resoluciones que se presentan, se han omitido algunos detalles técnicos. Dichos detalles deben ser completados para tener una solución correcta de cada cuestión.