GEOMETRÍA II

30 de marzo de 2001

1. Sea $\alpha : \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}^3$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco con curvatura $k > 0$ y torsión $\tau > 0$ **constantes.** Denotamos por $\{\mathbf{t}(s),\ \mathbf{n}(s),\ \mathbf{b}(s)\}$ su triedro de Frenet. Definimos la curva

$$\gamma(s) = -\frac{1}{\tau}\mathbf{n}(s) + \int_0^s \mathbf{b}(u)\,du.$$

Calcular el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de γ.

2. Dadas las superficies

$$S_1 = \{(x,y,z)\ /\ \ x^2+y^2=1,\ z>0\},$$

$$S_2 = \{(x,y,z)\ /\ \ z = x^2+y^2\}$$

se considera la aplicación

$$\begin{aligned} f : S_1 &\longrightarrow S_2 \\ (x,y,z) &\longrightarrow (x\sqrt{z}, y\sqrt{z}, z). \end{aligned}$$

(Gráficamente: trazamos la recta horizontal que une el punto (x,y,z) con el eje z y $f(x,y,z)$ es el punto de corte de esa recta con el paraboloide.)

En S_1 se considera la parametrización local

$$\mathrm{X}(\theta,z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z), \qquad (\theta,z) \in (0,2\pi)\times(0,\infty),$$

y en S_2,

$$\mathrm{Y}(u,v) = (u,v,u^2+v^2) \qquad (u,v)\in\mathrm{R}^2.$$

Sea $p = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1/2)$. Escribir $df_p\mathrm{X}_\theta$ y $df_p\mathrm{X}_z$ en la base $\{\mathrm{Y}_u, \mathrm{Y}_v\}$. (Notación: $df_p\mathrm{X}_\theta$ es lo mismo que $T_p f X_\theta$ y $df_p\mathrm{X}_z$ lo mismo que $T_p f \mathrm{X}_z$)