GEOMETRÍA II

21 de junio de 2001

1. (3 puntos) Sea $\alpha : \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}^3$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco con curvatura constante $k = 4$ y torsión constante $\tau = 2$.

Sea

$$\beta(s) = \alpha(s) - \frac{1}{\tau}\mathbf{b}(s).$$

a) Calcular su parámetro longitud de arco.
b) Hallar su triedro de Frenet en función del triedro de Frenet de α.
c) Calcular su curvatura y su torsión.

2. (2 puntos) Sea S el helicoide con la parametrización

$$\mathrm{X}(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, u).$$

Sean $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow S$, $\alpha(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, t)$ y $w_0 = (0, 2, 1) \in T_{\alpha(0)}S$.

a) Hallar $w : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathrm{R}^3$ el campo paralelo a lo largo de α con $w(0) = w_0$.

b) Probar que $T_{\alpha(2\pi)}S = T_{\alpha(0)}S$, $\mathrm{X}_u(0, 2) = \mathrm{X}_u(2\pi, 2)$ y $\mathrm{X}_v(0, 2) = \mathrm{X}_v(2\pi, 2)$. Denotamos por $\mathcal{T}_{0,2\pi}$ la aplicación transporte paralelo desde $t = 0$ a $t = 2\pi$. Hallar la matriz de $\mathcal{T}_{0,2\pi}$ en la base $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{X}_u(0, 2), \mathrm{X}_v(0, 2)\right\}$.

3. (3 puntos) Sea S la pseudoesfera y $\mathrm{X} : \mathrm{R} \times (0, \infty) \longrightarrow S$ la parametrización regular

$$\mathrm{X}(u, v) = \left(\frac{1}{\cosh v}\cos u, \frac{1}{\cosh v}\operatorname{sen} u, v - \tanh v\right).$$

a) Calcular los coeficientes E, F y G de la primera forma fundamental en esta parametrización.

b) Calcular los coeficientes e, f y g de la segunda forma fundamental en esta parametrización.

c) Calcular la curvatura K de Gauss.

4. (2 puntos) Sea S una superficie regular conexa. Supongamos que para cada punto p existe un $\lambda(p) \in \mathrm{R}$ tal que para toda curva regular $\alpha : I \to S$ con $\alpha(0) = p$ entonces $k_n(0)$, la curvatura normal de α satisface $k_n(0) = \lambda(p)$ (o de otra manera, para todo vector $w \in T_pS$, unitario se tiene que $k_n(w) = \lambda(p)$).

Probar que S es parte de un plano o una esfera.