

1.- (3 puntos) Sea  $\alpha : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^3$  la curva :

$$\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t)$$

- a) Calcular  $s(t)$ , el parámetro de longitud de arco tal que  $s(0) = 0$ .  
 b) Calcular su triedro de Frenet, su curvatura y su torsión.

2.- (2 puntos) Sea  $S$  una superficie regular,  $\mathbf{x} : U \mapsto S$  una parametrización regular. Suponer que para todo  $(u, v) \in U$  se tiene  $E(u, v) = 1$ ,  $F(u, v) = 0$  y  $e(u, v) = 0$ .

Probar que la curva  $\alpha(t) = \mathbf{x}(t, v_0)$  (donde  $(t, v_0) \in U$ ) es un segmento de recta.

3.- (3 puntos) Sea  $S_1 = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$  el cilindro unidad, consideramos la parametrización local  $\mathbf{x} : (-\pi, \pi) \times \mathbf{R} \mapsto S_1$  de  $S_1$  :

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$$

Sea  $S_2 = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2, z > 0 \}$  el cono recto, consideramos la parametrización local  $\mathbf{y} : (-\pi, \pi) \times (0, +\infty) \mapsto S_2$  de  $S_2$  :

$$\mathbf{y}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \operatorname{sen} \bar{u}, \bar{v})$$

Sea  $M : \mathbf{R}^3 - \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 0 \} \mapsto \mathbf{R}^3$  :

$$M(x, y, z) = (e^z x, e^z y, e^z \sqrt{x^2 + y^2})$$

- a) Probar que  $M(S_1) \subset S_2$ .  
 b) Sea  $m : S_1 \mapsto S_2$  la restricción de  $M$  ( $m(p) = M(p)$ ). Hallar la expresión local de  $m$  en las parametrizaciones  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .  
 c) Sea  $p = (1, 0, 0) = \mathbf{x}(0, 0) \in S_1$ . Hallar la matriz de  $T_p m$  en las bases  $\mathbf{x}_u(0, 0), \mathbf{x}_v(0, 0)$  de  $T_p S_1$  e  $\mathbf{y}_u(0, 1), \mathbf{y}_v(0, 1)$  de  $T_{m(p)} S_2$ .  
 d) ¿Es  $m$  una isometría local? Justificar la respuesta.

4.- (2 puntos) Sea  $S$  el hiperboloide de una hoja, consideramos la parametrización regular de  $S$  :

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \operatorname{sen} u, \operatorname{senh} v)$$

donde  $u, v \in \mathbf{R}$ .

Hallar  $k_g$  la curvatura geodésica,  $k_n$  la curvatura normal y  $\tau_g$  la torsión geodésica de los paralelos y los meridianos de  $S$  en la parametrización  $\mathbf{x}$ .