1. Sea $\alpha_0 : \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}^2$ una curva regular parametrizada por longitud de arco. Supóngase que $k_0(s) = \operatorname{sen} s$ es su curvatura. Para $|\lambda| < 1$ se define

$$\alpha_\lambda(s) = \alpha_0(s) + \lambda \mathbf{n}_0(s),$$

donde $\mathbf{t}_0(s)$, $\mathbf{n}_0(s)$ es el diedro de Frenet de α_0.

a) Hallar s_λ, el parámetro longitud de arco de α_λ y probar que α_λ es regular. Hallar la longitud de $\alpha_\lambda([0, 2\pi])$.

b) Hallar k_λ, la curvatura de α_λ. Hallar $\mathbf{t}_\lambda$, $\mathbf{n}_\lambda$, el diedro de Frenet de α_λ.

2. Sean $U = \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 \,/\, |z| < 1\}$ y $F : U \longrightarrow \mathrm{R}^3$, definida por

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, \frac{1+z}{1-z}\right).$$

Sean

$$S_1 = S^2 \cap U = S^2 \setminus \{(0,0,1), (0,0,-1)\}, \quad S_2 = \{(x,y,z) \,/\, x^2 + y^2 = z\} \setminus \{(0,0,0)\}.$$

a) Probar que $F(S_1) \subset S_2$.

Sea f la restricción de F a S_1. Sean $\phi(u, v) = (\operatorname{sen} v \cos u, \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos v)$ y $\psi(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \operatorname{sen} \bar{u}, \bar{v}^2)$, $\phi : (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \longrightarrow S_1$, $\psi : (-\pi, \pi) \times (0, \infty) \longrightarrow S_2$ parametrizaciones locales de S_1 y S_2, respectivamente. Sea $p = \phi(-\pi, \pi)$.

b) Probar que $f(\phi((-\pi, \pi) \times (0, \pi))) \subset \psi((-\pi, \pi) \times (0, \infty))$ y hallar la expresión local de f en estas parametrizaciones.

c) Hallar la matriz de $T_p f : T_p S_1 \longrightarrow T_{f(p)} S_2$ ($T_p f$ es lo mismo que df_p) en las bases $\phi_u(0, \pi/2)$, $\phi_v(0, \pi/2)$ de $T_p S_1$ y $\psi_{\bar{u}}(0, 1)$, $\psi_{\bar{v}}(0, 1)$ de $T_{f(p)} S_2$.

d) Decidir si $T_p f$ es isometría lineal , es decir, si cumple que para todo vector $w \in T_p S_1$ se tiene que $\|w\| = \|T_p f w\|$. Decidir si f es isometría.

3. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathrm{R}^3$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco, tal que $\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Sea $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ su triedro de Frenet. Definimos $\mathrm{X} : I \times \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}^3$ la superficie parametrizada regular

$$\mathrm{X}(u, v) = \alpha(u) + v \mathbf{b}(u).$$

a) Probar que su curvatura de Gauss $K(u, v) \leq 0$ para todo (u, v).

$S = Im$X.

4. Sean S una superficie regular y $\alpha : I \to S$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco que es línea asintótica y de curvatura de S. Probar que α es una curva plana.