

1. Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular, parametrizada por longitud de arco, tal que el vector de posición $\alpha(s)$ es ortogonal al vector normal $\mathbf{n}(s)$, para todo s . Probar que la traza de α está contenida en una recta que pasa por el origen.

2. Sea $\phi : \mathbb{R} \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\phi(u, v) = (\sen v \cos u, \sen v \sen u, \cos v + \frac{1}{u^2 + 1}).$$

Sean $S = \text{Im}\phi$ y $\alpha : (0, \pi) \rightarrow S$ la curva coordenada $u = 0, v = t$.

- Probar que la recta tangente a α en t corta al eje z para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$.
- Probar que α es una curva plana.
- Hallar $\cos \theta(t)$, donde $\theta(t)$ es el ángulo que forman el plano que contiene a la traza de α y el plano tangente $T_{\alpha(t)}S$.

3. Sean $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco y S una superficie regular tales que $\alpha(I) \subset S$.

- Probar que α es asintótica si y sólo si para todo t el plano osculador de α en t es tangente a S en $\alpha(t)$.
- Probar que α es una geodésica si y sólo si para todo t el plano osculador de α en t es normal a S en $\alpha(t)$.
- Probar que si α es línea de curvatura, su plano osculador puede hacer cualquier ángulo con S . Es más, ese ángulo puede variar dependiendo de t .

4.- Sean S el hiperboloide de una hoja y la parametrización regular de S :

$$X(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sen u, \sinh v)$$

donde $u, v \in \mathbb{R}$.

Sea v_0 tal que $\sinh v_0 = 2$ y sea $\alpha : [0, 4\pi] \rightarrow S$, definida por $\alpha(t) = X(t, v_0)$. Sea $w_0 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}) \in T_{\alpha(0)}S$.

- Hallar $w(t)$ el campo paralelo a lo largo de α con $w(0) = w_0$.
- Hallar la matriz del transporte paralelo $\mathcal{T}_{4\pi, 0} : T_{\alpha(0)}S \rightarrow T_{\alpha(4\pi)}S$ en la base $e_1 = (0, 1, 0), e_2 = (2/3, 0, \sqrt{5}/3)$ de $T_{\alpha(0)}S = T_{\alpha(4\pi)}S$.