UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID.

GEOMETRÍA II. **Junio de 2003.**

Nombre y apellidos: DNI:

1. Sea $\gamma(s)$ una curva birregular en el espacio, parametrizada por longitud de arco, y sea $\mathbf{t}(s)$ su tangente unitaria. Sea $s=\sigma(t)$ una función con $\sigma'(t)>0$, y definamos la curva

$$\eta(t)=\int \mathbf{t}(\sigma(t))\,dt\ .$$

(a) Demuestra que $\eta(t)$ también es una parametrización por longitud de arco y calcula la curvatura y torsión de η en función de las de γ.

(b) Para

$$\gamma(s)=\Big(\ 2\cos\sqrt{s}+2\sqrt{s}\operatorname{sen}\sqrt{s}\ \ ,\ \ 2\operatorname{sen}\sqrt{s}-2\sqrt{s}\cos\sqrt{s}\ \ ,\ \ 0\ \Big)$$

y la función $\sigma(t)=t^2$, $t>0$, calcula la curva $\eta(t)$ y dibuja γ y η ¿Tienen γ y η la misma forma?

2. Define el concepto de línea geodésica y da sus propiedades.

3. Una superficie tiene, en unas coordenadas (u,v)

$$E=p\ \operatorname{sen}^2 u+\cos^2 u\quad ,\quad F=0\quad ,\quad G=p\ \cos^2 u\ ,$$

$$e=\frac{1}{\ell}\qquad\qquad ,\quad f=0\quad ,\quad g=\frac{\cos^2 u}{\ell}\ ,$$

donde ℓ es una función que no se anula. Determina el valor del parámetro p para el cual la superficie es un trozo de esfera.

4. Una superficie tiene

$$E=v^2\ \ ,\ \ F=0\ \ ,\ \ G=u^2\ ,$$

en ciertas coordenadas curvilíneas (u,v) con $u>0$, $v>0$. Demuestra que es isométrica al plano (no hace falta que construyas la isometría).