

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID.

GEOMETRÍA II.

Septiembre de 2003.



Nombre y apellidos:

DNI:

1. Consideramos la superficie $\Phi(u, v) = \left(2u, u^2 + v, \frac{v^2}{2} \right)$. Calcula su curvatura Gaussiana y halla la zona de los puntos elípticos, la de los parabólicos y la de los hiperbólicos. Halla también los puntos umbilicales.

2. Define el concepto de línea asintótica y explica por qué éste no es un concepto de la geometría intrínseca de la superficie.

3. Cierta superficie paramétrica $\Phi(u, v)$ tiene

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u + v.$$

(a) Calcula las ecuaciones de las geodésicas, y prueba que las curvas $v = \text{cte}$ son geodésicas.

(b) Demuestra que si $\alpha(s) = \Phi(u(s), v(s))$ es una parametrización por longitud de arco y cumple $u'(s) = (u + v)v'(s) + c$ para alguna constante c , entonces también cumple $(u'(s) + v'(s))(u''(s) - \frac{1}{2}v'(s)^2) = 0$.

[Indicación: halla una expresión para la identidad $\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) \equiv 1$ y derivala].

(c) Determina para qué valores de la constante a es geodésica la curva en la superficie dada por $u = ae^v - v - 1$.

4. Sea γ una curva birregular en el espacio, tal que sus planos rectificantes son paralelos a una dirección fija. Demuestra que sus planos osculadores forman un ángulo constante con dicha dirección.