

Geometría de Curvas y Superficies

R. Flores Espinoza.

Universidad de Sonora

Índice general

1. Estructuras básicas de \mathbb{R}^n.	1
1.1. La estructura lineal de \mathbb{R}^n .	1
1.2. La métrica euclidiana en \mathbb{R}^n .	3
1.3. La topología de \mathbb{R}^n .	5
1.4. El producto vectorial en \mathbb{R}^3 .	6
1.5. Ejercicios del Capítulo.	7
2. Geometría de curvas en \mathbb{R}^3.	9
2.1. Curvas Parametrizadas.	9
2.2. Longitud de una curva	12
2.3. Campos vectoriales a lo largo de curvas.	12
2.4. Curvatura y Torsión de Curvas parametrizadas de rapidez unitaria	13
2.5. Interpretación geométrica de la curvatura y la torsión	15
2.6. La forma normal de una curva en el espacio.	16
2.7. El marco de Frenet para curvas de rapidez arbitraria.	17
2.8. Ejemplos de Curvas.	18
2.8.1. Curvas planas.	18
2.8.2. Hélices cilíndricas.	19
2.8.3. Curvas esféricas	20
2.8.4. La imagen esférica de una curva	21
2.9. Ejercicios del Capítulo.	21
3. Geometría Euclidiana	23
3.1. Isometrías euclidianas.	23
3.2. Congruencia de curvas. Teorema fundamental de curvas.	26
4. Cálculo en espacios euclidianos.	29
4.1. La derivada direccional.	29
4.2. La diferencial de una función.	30
4.3. Campos vectoriales.	33
4.4. Derivadas de campos vectoriales en \mathbb{R}^n .	35

5. Superficies. Cálculo sobre superficies.	37
5.1. Parametrización de Superficies.	37
5.2. Ejemplos de superficies.	39
5.2.1. Superficies cilindricas.	39
5.2.2. Superficies regladas.	39
5.2.3. Superficies de revolución.	40
5.2.4. Superficies como gráficas de funciones.	41
5.2.5. Superficies de nivel	41
5.3. El plano tangente	42
5.4. Superficies orientables.	43
5.5. Distancia en una superficie y Primer forma fundamental.	45
5.6. Area en superficies.	49
6. Curvatura en superficies.	51
6.1. El Operador de forma.	51
6.2. La Curvatura normal.	53
6.3. Curvas sobre una superficie.	59
6.3.1. Curvatura geodésica	59
6.3.2. Curvas Asintóticas	60
6.3.3. Curvas principales.	61
6.3.4. Curvas geodésicas	61
6.4. Ejercicios del Capitulo.	62
7. Geometría Intrínseca de superficies	63

Capítulo 1

Estructuras básicas de \mathbb{R}^n .

1.1. La estructura lineal de \mathbb{R}^n .

El espacio \mathbb{R}^n es el conjunto de *n*-tuplas ordenadas de números reales

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}. \quad (1.1)$$

A los elementos de \mathbb{R}^n se les llama **vectores n-dimensionales**. Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un elemento de \mathbb{R}^n al real x_i $i = 1, \dots, n$ se le llama la **iesima componente** del vector \mathbf{x} .

Sabemos de los cursos elementales de geometría analítica en tres dimensiones, que la introducción de un sistema cartesiano de ejes coordenadas nos permite identificar cada elemento de \mathbb{R}^3 con un punto en el espacio tridimensional. Por analogía, podemos pensar cada elemento de \mathbb{R}^n con un punto del espacio *n*-dimensional.

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ son dos elementos de \mathbb{R}^n y $\lambda \in \mathbb{R}$ es un número real, entonces definimos la **suma vectorial** y la **multiplicación por un escalar** mediante las expresiones:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad (1.2)$$

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \quad (1.3)$$

El conjunto \mathbb{R}^n dotado de las operaciones anteriores resulta ser lo que se denomina un espacio vectorial sobre el campo de los números reales. Recordemos ahora este concepto

Definición 1 *Un conjunto \mathbf{X} es un espacio vectorial sobre el campo de los reales si \mathbf{X} está dotado de una operación binaria $+$, y para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ la multiplicación de elementos de \mathbf{X} con λ está definida de tal manera que se*

cumplen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} ((\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}) &= (\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})) && \text{asociatividad} \\ \exists \mathbf{0} \in \mathbf{X} &\text{ tal que } \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}; \\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \exists -\mathbf{x} \in \mathbf{X} &\text{ tal que } \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}; \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{y} + \mathbf{x} && \text{conmutatividad} \\ \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \\ (\lambda + \beta)\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x} + \beta\mathbf{x} \\ (\lambda\beta)\mathbf{x} &= \lambda(\beta\mathbf{x}) \\ 1\mathbf{x} &= \mathbf{x} \end{aligned}$$

A los elementos de un espacio vectorial \mathbf{X} se les denomina **vectores**.

Ejercicio 2 Verifique que \mathbb{R}^n con las operaciones (1.2,1.3) es un espacio vectorial.

Una **combinación lineal** de k vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbf{X}$ es un vector de la forma

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{x}_k$$

donde los coeficientes λ_i son números reales. Los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbf{X}$ se dicen **linealmente independientes** si la única combinación lineal de ellos idénticamente $\mathbf{0}$ es aquella cuyos coeficientes son todos igual a cero. Una **base** de \mathbf{X} es un conjunto maximal de vectores linealmente independientes. La **dimensión** del espacio vectorial \mathbf{X} es el número de vectores (cardinalidad) que contiene una base.

Si denotamos por \mathbf{e}_i el vector de \mathbb{R}^n cuyas componentes son cero salvo la i -ésima que es 1, el conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n\}$ es una base de \mathbb{R}^n denominada la **base canónica**.

Ejercicio 3 Demuestre que la dimensión de \mathbb{R}^n es n .

Un subconjunto no vacío V de \mathbb{R}^n se dice **subespacio vectorial** si para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ y $\lambda\mathbf{x} \in V$. Note que todo subespacio vectorial contiene al vector $\mathbf{0}$. Los subespacios lineales de \mathbb{R}^n son espacios vectoriales en sí cuya dimensión es siempre menor o igual a n . Por ejemplo, el subespacio que consta solo del vector $\mathbf{0}$ tiene dimensión igual a cero; el conjunto de vectores de la forma $\lambda\mathbf{x}_0$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ y \mathbf{x}_0 un vector fijo, constituyen un subespacio de dimensión 1 y en el espacio cartesiano determinan una recta. En general, si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ son k vectores de \mathbb{R}^n linealmente independientes, entonces el subconjunto

$$L = \{\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{x}_k \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

constituye un subespacio vectorial de dimensión k . que se denomina **k-plano**. Si $k = n - 1$ al **k-plano** se le llama **hiperplano**.

Un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^n es un **subespacio vectorial afin** si es el trasladado de un subespacio vectorial.

La **dimension de un subespacio vectorial afin** F es la dimension del espacio vectorial a partir del cual F se obtiene por traslacion. Si la dimension de F es k , a F se le llama **k-plano**. Si $k = n - 1$ a F se le dice **hiperplano** de \mathbb{R}^n .

Daremos enseguida el concepto de espacio tangente de \mathbb{R}^n en un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, en los siguientes términos: Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, al conjunto $\mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$ de pares de la forma (\mathbf{p}, \mathbf{x}) con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se le llama el **espacio tangente a \mathbb{R}^n en \mathbf{p}** . A \mathbf{p} se le llama el **punto de aplicacion** del vector tangente y a \mathbf{x} se le llama la **parte vectorial** del vector tangente. A la union ajena $\mathbb{T}(\mathbb{R}^n) = \cup_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n} (\mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n))$ le llamamos el espacio tangente a \mathbb{R}^n . $\mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$ resulta ser un espacio vectorial bajo las operaciones

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) + (\mathbf{p}, \mathbf{y}) &= (\mathbf{p}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ \lambda(\mathbf{p}, \mathbf{x}) &= (\mathbf{p}, \lambda\mathbf{x})\end{aligned}$$

Como se ve, existe una correspondencia entre $\mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$ y \mathbb{R}^n dada mediante la funcion de proyección

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\mathbf{p}, \mathbf{x}) &\rightarrow \mathbf{x}\end{aligned}$$

El **haz tangente** $\mathbb{T}(\mathbb{R}^n)$ de \mathbb{R}^n es la union ajena de todos los espacios tangentes a puntos de \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{T}(\mathbb{R}^n) = \cup_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n} (\mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)) \quad (1.4)$$

Al mapeo

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{T}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \pi(\mathbf{p}, \mathbf{x}) &= \mathbf{p}\end{aligned}$$

que asigna a cada vector tangente el punto en el que esta anclado se le llama **proyeccion canonica** del haz tangente.

1.2. La metrica euclidiana en \mathbb{R}^n .

La estructura lineal de \mathbb{R}^n no basta para medir distancias, areas, angulos, volúmenes, etc . Para medir distancias o longitudes se necesita contar con una metrica. La metrica euclidiana en \mathbb{R}^n esta asociada con una funcion bilineal llamada **producto interior**. El producto interior de dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ se define por la formula

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1.5)$$

Con la ayuda del producto interior podemos definir la **norma** o **longitud** de un vector, así como la **distancia euclidiana entre dos puntos**

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}, \quad (1.6)$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (1.7)$$

Proposición 4 *La distancia euclidiana tiene las siguientes propiedades:*

- (i) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, y la igualdad se tiene si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
- (ii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
- (iii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq d(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ (desigualdad del triángulo)

Demostración. Basta probar (iii) ya que el resto es obvio. Introduciendo los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$, $\mathbf{b} = \mathbf{z} - \mathbf{y}$ podemos escribir (iii) en la forma

$$\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$$

o equivalentemente en la forma

$$\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \geq \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

o

$$\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \geq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (1.8)$$

Esta última desigualdad se conoce como **desigualdad de Cauchy-Scharwtz-Bunyakovsky** y puede ser probada considerando el polinomio de segundo grado en la variable λ

$$p(\lambda) = (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b})^2 = \lambda^2\|\mathbf{b}\|^2 + 2\lambda\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \|\mathbf{a}\|^2$$

Siendo el polinomio $p(\lambda) \geq 0$ para toda λ , entonces su discriminante no puede ser positivo, es decir

$$0 \geq 4(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - 4\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2$$

que es precisamente lo que queremos probar. ■

Si \mathbf{X} es un conjunto dotado de una función d que tiene las propiedades (i)-(iii) de la proposición anterior, entonces se dice que el par (\mathbb{R}^{2n}, d) constituye un **espacio métrico**.

La estructura metrica obtenida a partir del producto interior nos permite medir el angulo entre dos vectores usando la formula

$$\theta = \text{ArcCos} \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \quad (1.9)$$

Asi tambien tenemos un concepto de ortogonalidad entre vectores, diciendo que \mathbf{x} es **ortogonal** a \mathbf{y} si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$.

1.3. La topología de \mathbb{R}^n .

Definición 5 La **bola abierta** en \mathbb{R}^n con centro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y radio $\varepsilon > 0$ (o la ε -bola centrada en \mathbf{x}) es el conjunto

$$B_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon\}$$

Analogamente, La **bola cerrada** en \mathbb{R}^n con centro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y radio $\varepsilon > 0$ (o la ε -bola cerrada centrada en \mathbf{x}) es el conjunto

$$B_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \varepsilon\}$$

Definición 6 Un subconjunto U de \mathbb{R}^n se dice **abierto** si para cada $\mathbf{x} \in U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset U$.

Definición 7 Un subconjunto V de \mathbb{R}^n es una **vecindad** de un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si existe un conjunto abierto W tal que $\mathbf{x} \in W \subset V$.

Definición 8 Un par $(\mathbf{X}, \mathcal{A})$ se dice que forman un espacio **topológico** si \mathbf{X} es un conjunto y \mathcal{A} es una familia de subconjuntos de \mathbf{X} , denominados **subconjuntos abiertos de \mathbf{X}** , tales que abiertos (es decir pertenecen a \mathcal{A});

(ii) La intersección de dos conjuntos abiertos es un conjunto abierto;

(iii) La unión de una familia arbitraria de abiertos es un conjunto abierto.

A la familia \mathcal{A} de los subconjuntos abiertos, se le llama la **topología** de \mathbf{X} .

Un subconjunto B de un espacio topológico $(\mathbf{X}, \mathcal{A})$ se dice **cerrado** si su complemento B^c es un conjunto abierto.

Ejemplo 9 Si \mathbf{X} es un conjunto y tomamos \mathcal{A} como la familia de todos los subconjuntos de \mathbf{X} , entonces $(\mathbf{X}, \mathcal{A})$ resulta ser un espacio topológico. A esta topología se le llama la **topología discreta**.

Ejemplo 10 Si $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$ y \mathcal{A} es la familia de los subconjuntos abiertos de acuerdo a la definición (1.4), entonces \mathcal{A} es una topología para \mathbb{R}^n llamada la **topología estandar**.

Si $(\mathbf{X}, \mathcal{A})$ es un espacio topológico y $S \subset \mathbf{X}$, la familia de subconjuntos

$$\mathcal{A}_S = \{A \cap S, \text{ con } A \in \mathcal{A}\}$$

constituye una topología para S llamada la **topología relativa**.

Si $(\mathbf{X}, \mathcal{A})$ y $(\mathbf{Y}, \mathcal{B})$ son dos espacios topológicos, una función $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ se dice **continua** si la imagen inversa $f^{-1}(B)$ de cada elemento B de \mathcal{B} es un elemento de \mathcal{A} . Una función $h : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ es un **homeomorfismo** si h es uno a uno y sobre y la función inversa $h^{-1} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ es continua. Si existe un homeomorfismo entre dos espacios topológicos, estos se dicen **homeomorfos o topologicamente equivalentes**.

El que dos espacios topológicos sean equivalentes significa que son el mismo desde el punto de vista de su topología. Por ejemplo, una esfera y un cubo son topológicamente equivalentes pues podemos construir un homeomorfismo de una en la otra, es decir podemos deformar continuamente la esfera estirandola o comprimiendola hasta obtener el cubo. Lo mismo podemos hacer con las dos curvas cerradas de la figura de abajo, cortando la primera en un punto y pegandola de nuevo en el mismo punto despues de haber hecho el nudo de la derecha.

Figura1.1

Algo diferente sucede por ejemplo, con un disco plano y una esfera solida. En este caso se puede probar a partir de uno de los resultados profundos de la topologia, el llamado **Teorema de invariancia del dominio** que establece que no existen homeomorfismos entre \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m con $n \neq m$.

Ejercicio 11 Demuestre que el disco abierto $D^2 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 2\}$ es homeomorfo a el cuadrado abierto unitario $R_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in (-1, 1), x_2 \in (-1, 1)\}$

1.4. El producto vectorial en \mathbb{R}^3 .

En el espacio vectorial tridimensional \mathbb{R}^3 , tenemos una estructura especial dada por la operación **producto vectorial** definida sobre pares de vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ de la siguiente forma

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \quad (1.10)$$

La operación \times posee las siguientes propiedades:

- (i) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$, (antisimetría);
- (ii) $\mathbf{x} \times (\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha\mathbf{x} \times \mathbf{y} + \beta\mathbf{x} \times \mathbf{z}$;
- (iii) $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) + \mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) = \mathbf{0}$; (*Identidad de Jacobi*)
- (iv) $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{0}$;
- (v) $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}$;
- (vi) $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2$

A (\mathbb{R}^3, \times) se llama la estructura de algebra de Lie de \mathbb{R}^3 .

A partir de las propiedades del producto vectorial, vemos por (iv) que $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ es un vector perpendicular al plano generado por \mathbf{x}, \mathbf{y} . Por (vi) tenemos que $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})\text{Sen}^2\theta$, donde θ es el angulo entre los vectores \mathbf{x}, \mathbf{y} .

Ejercicio 12 Usando la definición de producto vectorial demuestre que este tiene las propiedades (i)-(vi) señaladas arriba.

1.5. Ejercicios del Capitulo.

Ejercicio 13 Demuestre que la bola abierta $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ no es subespacio vectorial de \mathbb{R}^n .

Ejercicio 14 Escriba el vector $\mathbf{x} = (2, -1, 3)$ como suma de un vector \mathbf{y} en el plano generado por los vectores $(3, 5, 1)$ y $(-3, 1, 1)$ y un vector \mathbf{z} perpendicular a ese plano.

Ejercicio 15 Pruebe que el area del triangulo en el espacio cuyos vertices son los puntos $\mathbf{0}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ tiene area cuya magnitud es igual a $\frac{1}{2}\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$.

Ejercicio 16 Muestre que \mathbb{R}^n y cada bola abierta B de \mathbb{R}^n con la topologia relativa esta ultima, son homeomorfos.

Ejercicio 17 Muestre que la esfera "agujerada" $S^2 - \{\mathbf{p}\}$, donde

$$S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\} \text{ y } \mathbf{p} \in S^2 \quad (1.11)$$

con la topologia relativa es homeomorfo al plano \mathbb{R}^2 .

Capítulo 2

Geometría de curvas en \mathbb{R}^3 .

2.1. Curvas Parametrizadas.

Intuitivamente, una curva geométrica suave en el espacio, es un conjunto C de puntos tal que alrededor de cada de ellos, el conjunto se nos presenta como un segmento de recta suavemente deformado. Más formalmente, podemos decir que un conjunto C de puntos del espacio constituyen una **curva geométrica** si corresponden a la imagen de un intervalo abierto I de la recta bajo alguna función diferenciable $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ definida en I y con valores en el espacio \mathbb{R}^3 .

Por ejemplo, la circunferencia C formada por los puntos (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 = 1$, y $z = 0$, es una curva geométrica que se puede expresar como la imagen de la función

$$\begin{aligned}\gamma_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \gamma_1(t) &= (\text{Cos } t, \text{Sen } t, 0)\end{aligned}$$

o como la imagen de la función

$$\begin{aligned}\gamma_2 : (-3, 3) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \gamma_2(t) &= (\text{Sen}(t^2 - 1), \text{Cos}(t^2 - 1), 0)\end{aligned}$$

A las distintas funciones que se pueden tomar para expresar una curva geométrica se les llama **parametrizaciones** de la curva.

Al tomar una parametrización γ de una curva geométrica, no solo se representan los puntos de esa curva sino que además se obtiene una velocidad de recorrido de esos puntos dada por la norma de la derivada de γ . Por ejemplo, en el caso anterior, la parametrización γ_1 recorre los puntos de la circunferencia con velocidad unitaria, mientras que la parametrización γ_2 recorre los puntos con velocidad absoluta variable e igual a $2|t|$.

Para clarificar el papel de la parametrización de curvas introduciremos la siguiente definición:

Definición 18 Una **curva parametrizada** en el espacio \mathbb{R}^3 es una función diferenciable γ definida en un intervalo abierto I de la recta y con valores en \mathbb{R}^3 . A la imagen de una curva parametrizada se le llama la **traza** de la curva.

Note que una curva parametrizada es una función, mientras que su traza corresponde a lo que inicialmente llamamos curva geométrica.

Definición 19 Sea $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ con $a < t < b$ una curva parametrizada. Entonces la **velocidad** de γ es la función $\dot{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}(t), \frac{d\gamma_2}{dt}(t), \frac{d\gamma_3}{dt}(t) \right) \quad (2.1)$$

A la función $v(t)$ definida por $v(t) = \sqrt{\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)} = \|\dot{\gamma}(t)\|$ la llamaremos la **rapidez** de γ . La **aceleración** de γ es la función vectorial $\ddot{\gamma}$.

Definición 20 Una curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice **regular** si su velocidad $v(t)$ es distinta de cero. Si $v(t) = 1 \forall t \in I$, se dice que la curva es de **rapidez unitaria**.

Como ejemplos de curvas parametrizadas tenemos:

Ejemplo 21 (La recta) A la curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $\gamma(t) = p + tq$ con $p, q \in \mathbb{R}^3$, se le llama la **recta** que pasa por el punto p en la dirección del vector q .

Ejemplo 22 (La hélice). La curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), at)$ con $a \in \mathbb{R}$ se le llama **hélice**.

Definición 23 Sean $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\delta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos curvas parametrizadas. Diremos que δ es una **reparametrización** de γ si $\delta = \gamma \circ h$ para una función diferenciable suprayectiva $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$ tal que $h'(t) = \frac{dh}{dt}(t) > 0$, para toda $c < t < d$.

Al reparametrizar una curva se modifica la velocidad de recorrido de la traza de la curva, como lo muestra el siguiente lema.

Lema 24 Supongamos que δ es una reparametrización de γ . Escribamos $\delta = \gamma \circ h$ donde $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$. Entonces $\dot{\delta}(s) = h'(s)\dot{\gamma}(h(s))$.

Demostración. Escribamos $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ y $\delta(s) = (\delta_1(s), \delta_2(s), \delta_3(s))$. Entonces $\delta_i(s) = \gamma_i(h(s))$ para $i=1,2,3$. Aplicando la regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas tendremos $\dot{\delta}(s) = \dot{\gamma}(h(s))h'(s)$ y el lema se sigue. ■

Como vemos del lema anterior, al reparametrizar una curva no se cambia la traza de la curva pero si su rapidez en un factor dado por la derivada de la función h .

Una pregunta obligada que ahora se presenta es como reparametrizar una curva $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, de tal manera que la nueva rapidez de recorrido sea igual a 1. Esto es equivalente a encontrar una función $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$ con $h(s) > 0$ y $1 = \|\dot{\delta}(h^{-1}(t))\| = \|\dot{\gamma}(t)\| h'(h^{-1}(t))$, $\forall t \in (a, b)$. Reescribiendo la última expresión, utilizando la fórmula de derivación de la función inversa $\frac{dh^{-1}}{ds}(t) = \frac{1}{\frac{dh}{ds}(h^{-1}(t))}$ tenemos

$$\frac{dh^{-1}}{ds}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$$

e integrando llegamos a que

$$h^{-1}(t) = c + \int_a^t \|\dot{\gamma}(u)\| du \quad (2.2)$$

Tomando $c = 0$, escribimos la función

$$l : (a, b) \rightarrow (0, d) \text{ con } d = \text{longitud total de } \gamma$$

$$l(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(u)\| du \quad (2.3)$$

que se denomina **función de longitud de arco**. Entonces $h = l^{-1}$, y la parametrización

$$\delta = \gamma \circ l^{-1}$$

resulta ser de rapidez unitaria.

Ejemplo 25 Considere la curva $\gamma(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2), \frac{1}{6}(4t+1)^{\frac{3}{2}})$. $\gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Encuentre la parametrización de γ que posea rapidez unitaria.

Calculemos primero la función de longitud de arco

$$\begin{aligned} l(s) &= \int_0^s \|\dot{\gamma}(u)\| du = \int_0^s \sqrt{4u^2 + 4u + 1} du = \\ &= s^2 + s \end{aligned}$$

y enseguida

$$h(t) = l^{-1}(t) = \frac{-1 + \sqrt[3]{1+4t}}{2}$$

y la parametrización de rapidez unitaria es

$$\delta : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\delta(t) = \left(\cos\left(\frac{-1 + \sqrt[3]{1+4t}}{2}\right)^2, \sin\left(\frac{-1 + \sqrt[3]{1+4t}}{2}\right)^2, \frac{1}{6}\left(4\left(\frac{-1 + \sqrt[3]{1+4t}}{2}\right) + 1\right)^{\frac{3}{2}} \right).$$

2.2. Longitud de una curva

Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada y sean t_1, t_2 tal que $a < t_1 < t_2 < b$. La longitud $l_{[t_1, t_2]}$ del trozo de curva entre el punto $\gamma(t_1)$ y el punto $\gamma(t_2)$ viene dada por

$$l_{[t_1, t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}(u)\| \, du \quad (2.4)$$

Note que en terminos de la funcion longitud de arco, tenemos

$$l_{[t_1, t_2]} = l(t_2) - l(t_1). \quad (2.5)$$

Es decir, la funcion longitud de arco para cada valor t representa la longitud de la curva entre los puntos $\gamma(t)$ y $\gamma(t_1)$

2.3. Campos vectoriales a lo largo de curvas.

Definición 26 Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada. Un **campo vectorial a lo largo de** γ es una funcion Y que asigna a cada $a < t < b$ un vector $Y(t)$ en el punto $\gamma(t)$.

En términos del espacio tangente, un campo vectorial sobre la curva γ , es la parte vectorial de una curva en $\mathbb{T}\mathbb{R}^3$ de la forma

$$t \rightarrow (\gamma(t), Y(t)) \quad (2.6)$$

Lo anterior significa que un campo vectorial Y a lo largo de γ define una curva en \mathbb{R}^3

$$Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t)), \quad t \in (a, b)$$

La derivada de un campo Y a lo largo de γ se define como el campo vectorial

$$\frac{dY}{dt}(t) = \dot{Y}(t) = (\dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \dot{y}_3(t)).$$

Por ejemplo, la velocidad y la aceleración de una curva definen campos vectoriales sobre esa curva.

Un campo vectorial Y sobre una curva se puede multiplicar por una funcion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ obteniendose otro campo vectorial fY tal que $fY(t) = f(t)Y(t)$. En general tenemos las siguientes relaciones

Lema 27 Sean X, Y dos campos a lo largo de la curva parametrizada $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ y sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funcion diferenciable. Entonces

$$\text{i). } \frac{d(fY)}{dt} = \frac{df}{dt} Y + f \frac{dY}{dt};$$

$$\text{ii). } \frac{d(X+Y)}{dt} = \frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt};$$

$$\text{iii). } \frac{d(X \cdot Y)}{dt} = \frac{dX}{dt} \cdot Y + X \cdot \frac{dY}{dt}.$$

2.4. Curvatura y Torsión de Curvas parametrizadas de rapidéz unitaria

Definición 28 Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada con rapidez unitaria, es decir $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$, $a < s < b$. Se define la **curvatura de** γ como la función $k_\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$k_\gamma(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\|. \quad (2.7)$$

La curvatura en cada punto P de la traza de la curva, mide la variación de el campo velocidad con respecto a la variación de la longitud de la curva en el punto P . Note que la curvatura para cada valor del parametro es siempre un numero no-negativo.

Definición 29 Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada con rapidez unitaria. Al campo definido por la velocidad de γ lo llamaremos el **campo vectorial tangente unitario a** γ y lo denotaremos por \mathbf{T}

$$\mathbf{T}(t) = \dot{\gamma}(t) \quad (2.8)$$

Enseguida hacemos la siguiente observación que asentaremos como el lema

Lema 30 Si $\mathbf{F} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de magnitud unitaria sobre la curva $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces el campo $\dot{\mathbf{F}}$ es ortogonal a \mathbf{F} para cada $t \in (a, b)$.

Demostración. Basta derivar con respecto a t la función real $\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t)$ obteniendo

$$\frac{d(\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t))}{dt} = 2\mathbf{F}(t) \cdot \dot{\mathbf{F}}(t)$$

pero \mathbf{F} es de magnitud unitaria, luego $\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t) = 1$ y entonces el lado izquierdo de la fórmula anterior es igual a 0, de donde $\mathbf{F}(t) \cdot \dot{\mathbf{F}}(t) = 0, \forall t$ y el lema se sigue. ■

Definición 31 Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada de rapidez unitaria. El campo vectorial

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\dot{\mathbf{T}}(s)}{k_\gamma(s)} \quad (2.9)$$

se llama el **campo normal principal** y al campo vectorial

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \quad (2.10)$$

se llama el **campo binormal** de la curva γ . A la triada de campos $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ a lo largo de γ se le llama el **marco de campos de Frenet**.

Teorema 32 Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada con rapidez unitaria con curvatura $k(s) > 0$. Entonces: i). $\|\mathbf{T}\| = \|\mathbf{N}\| = \|\mathbf{B}\| = 1$ y $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = 0$. ii).-Las siguientes **Formulas de Frenet** se cumplen:

$$\dot{\mathbf{T}} = k\mathbf{N} \quad (2.11)$$

$$\dot{\mathbf{N}} = -k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \quad (2.12)$$

$$\dot{\mathbf{B}} = -\tau\mathbf{N} \quad (2.13)$$

Aqui $\tau(s)$ es llamada la **torsión** de la curva.

Demostración. Por definición, tenemos que

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\dot{\mathbf{T}}(s)}{k(s)}$$

de la cual obtenemos que $\|\mathbf{N}(s)\| = \frac{\|\dot{\mathbf{T}}\|}{k(s)} = 1$. Por otro lado, como $\|\mathbf{T}(s)\| = 1$ aplicando el lema (13) obtenemos que $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$. Finalmente, de las relaciones $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ y

$$\|\mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{T} \times \mathbf{N}\|^2 = \|\mathbf{T}\|^2\|\mathbf{N}\|^2 - (\mathbf{T} \cdot \mathbf{N})^2 = 1$$

probamos i).

Para probar ii) procederemos de la siguiente manera: La primera ecuación (2.11) se obtiene directamente de la definición de curvatura y vector normal a la curva. Para obtener las otras dos ecuaciones expresamos las derivadas $\dot{\mathbf{N}}$ y $\dot{\mathbf{B}}$ como combinación lineal de la base ortonormal $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$, y así

$$\dot{\mathbf{N}} = (\dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{T})\mathbf{T} + (\dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} + (\dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}$$

$$\dot{\mathbf{B}} = (\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{T})\mathbf{T} + (\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} + (\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}.$$

De las relaciones $\|\mathbf{N}\| = \|\mathbf{B}\| = 1$ y del lema (13) obtenemos que $\dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{N} = \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{B} = 0$, y derivando cada una de las igualdades $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = 0$, tenemos $\dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{T} + \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{N} = 0$, o $\dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{T} = -\dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{N} = -k$. Análogamente $\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{T} = -\dot{\mathbf{B}} \cdot \dot{\mathbf{T}} = -\dot{\mathbf{B}} \cdot (k\mathbf{N}) = 0$, además $\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{N} + \dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{B} = 0$. Resumiendo, tenemos

$$\dot{\mathbf{T}} = k\mathbf{N}$$

$$\dot{\mathbf{N}} = -k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$$

$$\dot{\mathbf{B}} = -\tau\mathbf{N}$$

donde $\tau(s) = \dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{B}$. ■

El sistema de Frenet (2.112.122.13) es un sistema lineal de nueve ecuaciones diferenciales en las funciones incógnita T, N, B . Si las funciones de curvatura $k(s)$ y de torsión $\tau(s)$ tienen derivadas continuas y especificamos valores iniciales $T(s_0), N(s_0), B(s_0)$, entonces por el Teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales para el problema de condición inicial, existe una única solución $T(s), N(s), B(s)$ al sistema de Frenet en un intervalo J alrededor del punto s_0 que satisface las condiciones iniciales impuestas. Si además $\|T(s_0)\| = \|N(s_0)\| = \|B(s_0)\| = 1$, y $T(s_0) \cdot N(s_0) = T(s_0) \cdot B(s_0) = N(s_0) \cdot B(s_0) = 0$, entonces el mismo teorema de unicidad nos asegura que $\|T(s)\| = \|N(s)\| = \|B(s)\| = 1$, y $T(s) \cdot N(s) = T(s) \cdot B(s) = N(s) \cdot B(s)$ para toda $s \in J$, y más aún $B(s) = T(s) \times N(s) \forall s \in J$. En el sentido anterior, vemos que dadas las funciones de curvatura y de torsión de una curva de rapidez unitaria así como la disposición del marco de Frenet en un punto de dicha curva, entonces la curva está totalmente determinada. Esto último forma parte del contenido del llamado Teorema Fundamental de Curvas que será presentado al final del capítulo segundo.

2.5. Interpretación geométrica de la curvatura y la torsión

Para formarnos una idea del significado geométrico de la curvatura y la torsión de una curva, enunciaremos el siguiente teorema

Teorema 33 Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada con rapidez unitaria con curvatura $k(s)$ y torsión $\tau(s)$. Entonces

- i). $k = 0$ si y solo si la curva es una recta;
- ii). $\tau = 0$ si y solo si la curva descansa en un plano;
- iii). Si $k(s) = \text{constante}$ y $\tau(s) = 0$ entonces la curva es una parte de una circunferencia de radio $r = \frac{1}{k}$.

Demostración. i) Si $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$ y $k = 0$, esto significa que $\|\ddot{\gamma}(s)\| = 0$ y por lo tanto $\dot{\gamma}(s) = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector constante. Integrando nuevamente tenemos que $\gamma(s) = s(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)$ y entonces γ es una recta. Recíprocamente, si γ es una recta, su aceleración es el vector cero y su curvatura también es igual a cero.

ii) Si $\tau = 0$, de la tercer ecuación del sistema de Frenet (1.12) tenemos que la binormal es un vector constante $B(s) = P$. Consideremos ahora $s_0 \in (a, b)$ y la función $\mu(s) = (\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot P$; derivando esta función obtenemos $\dot{\mu}(s) = \dot{\gamma}(s) \cdot P = \mathbf{T}(s) \cdot P = 0$, lo cual nos lleva a que $(\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot P = 0$ y entonces la curva descansa en el plano que pasa por $\gamma(s_0)$ y tiene normal P .

Recíprocamente, si la curva γ es plana, existe $P \in \mathbb{R}^3$ tal que $(\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot P = 0$ y tomando la primera y segunda derivada de esta expresión, tenemos

$\dot{\gamma}(s) \cdot P = T(s) \cdot P = 0$ y $k(s)N(s) \cdot P = 0$; luego el vector P es siempre ortogonal a $T(s)$ y $N(s)$ para toda s . Esto último implica que $P = B(s)$ y entonces $\dot{B}(s) = 0$, lo cual implica por la tercer ecuación de Frenet que $\tau(s) = 0$.

iii). Como $\tau = 0$, la curva γ es plana. Consideremos la curva $\delta(t) = \gamma(s) + \frac{1}{k}N(s)$ la cual es constante pues como consecuencia de las fórmulas de Frenet tenemos $\dot{\delta} = T + \frac{1}{k}\dot{N} = 0$. Entonces $\delta(s) = \text{vector constante} = c$, y $\gamma(s) + \frac{1}{k}N(s) = c$. Reescribiendo esto ultimo, tenemos $\|\gamma(s) - c\| = \frac{1}{k}$, lo cual muestra que $\gamma(s)$ pertenece a la circunferencia con centro c y radio $\frac{1}{k}$ ■

Otra forma de ilustrar el significado geométrico de la curvatura es mediante el llamado **círculo osculador** a la curva en un punto $\gamma(0) = p$. Para ello, consideremos la familia \mathcal{C} de todas las circunferencias en el espacio de tres dimensiones. El elemento de tal familia de centro $c \in \mathbb{R}^3$ y radio R que además descansa en el plano paralelo al generado por los vectores v_1 y v_2 con $\|v_1\| = \|v_2\|$ y $v_1 \cdot v_2 = 0$, tiene por parametrización de rapidez unitaria la expresión

$$\alpha(s) = c + R\text{Cos}\left(\frac{s}{R}\right) v_1 + R\text{Sen}\left(\frac{s}{R}\right) v_2. \quad (2.14)$$

Consideremos ahora la circunferencia α tal que "aproxima hasta orden 2 a la curva en el punto P "; esto quiere decir que cumple con *i*) $\alpha(0) = \gamma(0)$, *ii*). $\dot{\alpha}(0) = \dot{\gamma}(0)$, *iii*). $\ddot{\alpha}(0) = \ddot{\gamma}(0)$. De la expresión (1.12) para α tenemos que las condiciones *i*) – *iii*) implican

$$\begin{aligned} c + Rv_1 &= \gamma(0) \\ v_2 &= \dot{\gamma}(0) = T(0) \\ -\frac{1}{R}v_1 &= \ddot{\gamma}(0) = k(0)N(0). \end{aligned}$$

De estas últimas ecuaciones obtenemos que $R = \frac{1}{k(0)}$; $v_1 = -N(0)$; $v_2 = T(0)$; $c = \gamma(0) + RN(0)$. Resumiendo, tenemos que la circunferencia que aproxima hasta orden 2 a la curva γ en el punto $\gamma(0)$ tiene su centro en el punto $c = \gamma(0) + RN(0)$, su radio es $R = \frac{1}{k(0)}$ y descansa en el plano que pasa por $P = \gamma(0)$ y es paralelo al generado por el vector tangente $T(0)$ y el vector normal $N(0)$. A la circunferencia α se le llama **círculo osculador** a la curva γ en el punto p y su parameterización de rapidez unitaria es

$$\alpha(s) = \gamma(0) + \frac{1}{k(0)}(1 - \text{Cos}(k(0)s))N(0) + \frac{1}{k(0)}(\text{Sen}(k(0)s))T(0). \quad (2.15)$$

Al plano que lo contiene al círculo osculador se le llama **plano osculador** en el punto p y tiene por ecuación

$$((x, y, z) - \gamma(0)) \cdot T(0) \times N(0) = 0 \quad (2.16)$$

2.6. La forma normal de una curva en el espacio.

En el estudio de una curva γ en el espacio, hemos partido de su representación en términos de una base inicial fija. En este apartado mostraremos que alrededor de un punto de la curva, su expresión en términos del marco de Frenet hace evidente el significado geométrico de la curvatura y la torsión en el punto.

2.7. EL MARCO DE FRENET PARA CURVAS DE RAPIDÉZ ARBITRARIA.17

Sea pues, $\gamma(s)$ una curva de rapidez unitaria y $p = \gamma(0)$. Tomemos la expansión de γ en serie de Taylor alrededor de p

$$\gamma(s) = p + \dot{\gamma}(0)s + \frac{1}{2}\ddot{\gamma}(0)s^2 + \frac{1}{6}\dddot{\gamma}(0)s^3 + o(s^3) \quad (2.17)$$

Si ahora expresamos las derivadas en términos de la base y de las relaciones de Frenet ()

$$\dot{\gamma}(0) = T(0), \quad \ddot{\gamma}(0) = \pm k(0)N(0) \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(0) &= \pm \dot{k}(0)N(0) \pm k(0)\dot{N}(0) = \\ &= -k^2(0)T(0) \pm \dot{k}(0)N(0) \pm k(0)\tau(0)B(0) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Sustituyendo en la expansion de Taylor (2.17), obtenemos

$$\gamma(s) = p + sT(0) \pm \frac{1}{2}k(0)s^2N(0) \pm \frac{1}{6}k(0)\tau(0)s^3B(0) + \dots \quad (2.20)$$

En la última fórmula, vemos que para valores pequeños de s , mientras la curvatura $k(0)$ mide como en el plano osculador se desvía la curva de la dirección tangente, la torsión nos dice como la curva se aleja del plano osculador en la dirección de la binormal.

2.7. El marco de Frenet para curvas de rapidez arbitraria.

Hemos definido antes, los distintos conceptos y objetos geométricos asociados a una curva utilizando su parametrización de rapidez unitaria. Esta parametrización no siempre se puede obtener en términos de funciones elementales por lo que se hace importante el cálculo de los elementos geométricos asociados a la curva a partir de cualquier parametrización de ella.

Sea $\alpha(t)$ una curva parametrizada regular y $s(t) = \int_a^t \|\dot{\alpha}(u)\| du$ su función de longitud de arco y $t(s)$ su función inversa. Como mostramos antes, la reparametrización $\gamma(s) = \alpha(t(s))$ resulta ser de rapidez unitaria. Utilizando la regla de la cadena y las definiciones dadas para los distintos elementos de las fórmulas de Frenet, tenemos

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{d\gamma}{ds}(s) = \frac{d\alpha}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s) \\ \frac{d^2\gamma}{ds^2}(s) &= \frac{d^2\alpha}{dt^2}(t(s)) \left(\frac{dt}{ds}(s)\right)^2 + \frac{d\alpha}{dt}(t(s)) \frac{d^2t}{ds^2}(s) \end{aligned}$$

pero $\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\frac{ds}{dt}(t(s))} = \frac{1}{\|\dot{\alpha}(t(s))\|}$, y $\frac{d^2t}{ds^2}(s) = -\frac{\ddot{\alpha}(t(s)) \cdot \dot{\alpha}(t(s))}{\|\dot{\alpha}(t(s))\|^4}$, luego las formulas

anteriores se reescriben como

$$T(s(t)) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\gamma}{ds^2}(s(t)) &= \frac{\ddot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|^2} - \frac{(\ddot{\alpha}(t) \cdot \dot{\alpha}(t))\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|^4} = \\ &= \frac{\dot{\alpha} \times (\ddot{\alpha} \times \dot{\alpha})}{\|\dot{\alpha}\|^4}(t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

De las expresiones (2.21, 2.22) y de la definición de cada uno de los integrantes del marco de Frenet, obtenemos

$$k(s(t)) = \frac{\|\ddot{\alpha} \times \dot{\alpha}\|}{\|\dot{\alpha}\|^3}(t) \quad (2.23)$$

$$N(s(t)) = \frac{\dot{\alpha} \times (\ddot{\alpha} \times \dot{\alpha})}{\|\dot{\alpha}\|\|\ddot{\alpha} \times \dot{\alpha}\|}(t) \quad (2.24)$$

$$B(s(t)) = \frac{\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}\|}(t) \quad (2.25)$$

$$\tau(s(t)) = \frac{\dot{\alpha} \cdot (\ddot{\alpha} \times \ddot{\alpha})}{\|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}\|^2}(t) \quad (2.26)$$

Si ahora definimos $\tilde{T}(t) = T(s(t))$; $\tilde{N}(t) = N(s(t))$; $\tilde{B}(t) = B(s(t))$; $\tilde{k}(t) = k(s(t))$; $\tilde{\tau}(t) = \tau(s(t))$, las fórmulas de Frenet para estas nuevas funciones toma la forma

$$\frac{d\tilde{T}}{dt} = \tilde{k}(t)\|\dot{\alpha}(t)\|\tilde{N} \quad (2.27)$$

$$\frac{d\tilde{N}}{dt} = -\tilde{k}(t)\|\dot{\alpha}(t)\|\tilde{T} + \tilde{\tau}(t)\|\dot{\alpha}(t)\|\tilde{B} \quad (2.28)$$

$$\frac{d\tilde{B}}{dt} = -\tilde{\tau}(t)\|\dot{\alpha}(t)\|\tilde{N} \quad (2.29)$$

2.8. Ejemplos de Curvas.

2.8.1. Curvas planas.

Aquí mostraremos que las curvas planas están determinadas por su función de curvatura. Es esta una aplicación sencilla de las fórmulas de Frenet.

Supongamos que el plano donde descansa la curva plana es el plano $z = 0$. El vector tangente unitario toma la forma

$$T(s) = (\text{Cos}(\theta(s)), \text{Sen}(\theta(s))) \quad (2.30)$$

con $\theta(s)$ una función real.

Si queremos que su curvatura en el punto $\gamma(s)$ sea la función $k(s)$. Si además queremos que $k(s) = \|\dot{\gamma}(s)\| = \|T(s)\|$ obtenemos que $\theta(s) = k(s)$ es decir $\theta(s) = \int_0^s k(u)du + a$. Integrando la expresión $T(s) = \dot{\gamma}(s)$ obtenemos

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s \text{Cos} \left(\int_0^v k(u)du \right) dv + c, \int_0^s \text{Sen} \left(\int_0^v k(u)du \right) dv + d \right) \quad (2.31)$$

La fórmula anterior nos da todas las curvas plana con curvatura $k(s)$.

2.8.2. Hélices cilíndricas.

Definición 34 Una curva $\gamma(t)$ se dice helice cilíndrica si existe un campo vectorial $U(t)$ unitario y paralelo ($U(t) = \text{constante}$ y $\|U(t)\| = 1$), tal que $U(t)$ hace un ángulo constante con el vector tangente en el punto, es decir $U(t) \cdot \dot{\gamma}(t) = \text{constante}$.

Teorema 35 Una curva $\gamma(t)$ es una helice cilíndrica si y solo si $\frac{k(t)}{\tau(t)} = \text{constante}$.

Demostración. (Necesidad) Sea $\gamma(t)$ una parametrización de rapidez unitaria de una helice cilíndrica y $U(t) = U_0$ el vector unitario y paralelo tal que $U(t) \cdot \dot{\gamma}(t) = \text{constante}$. Derivando tenemos $U_0 \cdot \ddot{\gamma} = 0$, lo que significa que el vector normal es perpendicular a U_0 , lo que implica que U_0 está en el plano generado por los vectores $T(t)$ y $B(t)$ del marco de Frenet, y que U_0 se escribe como

$$\begin{aligned} U_0 &= (U_0 \cdot T(t))T(t) + (U_0 \cdot B(t))B(t) = \\ &= \text{Cos}\phi T(t) + \text{Sen}\phi B(t) \end{aligned}$$

Derivando

$$0 = \text{Cos}\phi \dot{T} + \text{Sen}\phi \dot{B}$$

y aplicando las relaciones de Frenet tenemos:

$$0 = k(t)\text{Cos}\phi N(t) + \text{Sen}\phi(-\tau(t)N(t))$$

de donde

$$\frac{k(t)}{\tau(t)} = \frac{\text{Sen}\phi}{\text{Cos}\phi} = \text{constante}. \quad (2.32)$$

(Suficiencia) Supongamos ahora que $\frac{k(t)}{\tau(t)} = \text{constante}$. Entonces existe ϕ tal que $\frac{k(t)}{\tau(t)} = \frac{\text{Sen}\phi}{\text{Cos}\phi} = \text{constante}$. Hagamos $U(t) = \text{Cos}\phi T(t) + \text{Sen}\phi B(t)$. Vemos que

$U(t)$ es ortogonal a la normal $N(s)$ y tal que $\dot{U}(t) = (k(t)\text{Cos}\phi - \text{Sen}\phi(\tau(t)))N(t) = 0$, luego, es un campo paralelo y unitario a lo largo de γ . Mas aun, $U(t) \cdot T(t) = \text{Cos}\phi = \text{constante}$, es decir, la curva es una helice cilíndrica. ■

Ejemplo 36 Verifiquemos que las curvas $\gamma(t)$ de la forma

$$\gamma(t) = (a\text{Cost}, b\text{Sent}, ct) \quad (2.33)$$

son hélices cilíndricas. A estas hélices se les llama **hélices elípticas**.

En vista del teorema anterior basta calcular la curvatura $k(t)$ y la torsión $\tau(t)$ y verificar que $\frac{k(t)}{\tau(t)} = \text{constante}$.

2.8.3. Curvas esféricas

Una curva $\gamma(t)$ se dice **esférica** si permanece en una esfera, es decir si existe $r > 0$ tal que $\|\gamma(t)\| = r$.

Si $\gamma(t)$ es una curva esférica de rapidéz unitaria, se tiene $(\gamma - c) \cdot (\gamma - c) = r^2$ y $\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = 1$ y consecuentemente $(\gamma - c) \cdot T = 0$, es decir

$$(\gamma - c) = (\gamma - c) \cdot N(t)N(t) + (\gamma - c) \cdot B(t)B(t).$$

y derivando tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= ((\gamma - c) \cdot \dot{N})N(t) + ((\gamma - c) \cdot N(t))\dot{N} + \\ &+ ((\gamma - c) \cdot \dot{B})B(t) + ((\gamma - c) \cdot B(t))\dot{B}. \end{aligned}$$

Aplicando las fórmulas de Frenet, obtenemos

$$\begin{aligned} T = \dot{\gamma} &= (\gamma - c) \cdot \dot{N}N + (\gamma - c) \cdot N(-kT + \tau B) + \\ &+ (\gamma - c) \cdot \dot{B}B(t) - \tau(\gamma - c) \cdot B(t)N. \end{aligned}$$

De donde $1 = (\gamma - c) \cdot N(-k)$; $\tau(\gamma - c) \cdot B(t) = (\gamma - c) \cdot \dot{N} = \frac{\dot{k}}{k^2}$ y entonces tenemos

$$(\gamma - c) = -\frac{1}{k}N(t) + \frac{\dot{k}}{\tau k^2}B(t).$$

y tomando norma a la expresión anterior obtenemos

$$r^2 = \frac{1}{k^2} + \left(\frac{\dot{k}}{\tau k^2}\right)^2 \quad (2.34)$$

Esta última fórmula nos relaciona la curvatura y la torsión de una curva sobre una esfera de radio r .

Note que en una curva esférica se tiene $1 = (\gamma - c) \cdot N(-k)$, y entonces $1 \leq kr$. Esto significa que la curvatura de una curva esférica es siempre mayor o igual a $\frac{1}{r}$.

2.8.4. La imagen esférica de una curva

Si $\gamma(t)$ es una curva de rapidez unitaria, entonces su campo tangente $T(t)$ define a su vez una curva sobre la esfera unitaria $\delta(t) = T(t)$. A la curva $\delta(t)$ se le llama **la imagen esférica de $\gamma(t)$** . Si calculamos el marco de Frenet para $\delta(t)$, obtenemos: $\dot{\delta} = \dot{T} = kN$ y derivando otra vez y aplicando las relaciones de Frenet $\ddot{\delta} = \dot{k}N - k^2T + k\tau B$, luego la curvatura de la imagen esférica es

$$k_{\delta} = \frac{\|\ddot{\delta} \times \dot{\delta}\|}{\|\dot{\delta}\|^3} = \frac{\| -k^3B + k^2\tau B \times N \|}{\|k^3\|} = \sqrt[2]{1 + \left(\frac{\tau}{k}\right)^2} \quad (2.35)$$

y análogamente se obtiene para la torsión de la imagen esférica δ

$$\tau_{\delta} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\tau}{k}\right)}{k\left(1 + \left(\frac{\tau}{k}\right)^2\right)} \quad (2.36)$$

De las formulas (2.32) y (2.36) vemos que la curvatura de la imagen esférica de una hélice cilíndrica es constante y que su torsión es cero. Esto implica, por el Teorema 16, que la imagen esférica de una hélice cilíndrica es un pedazo de circunferencia.

2.9. Ejercicios del Capitulo.

1.-Calcule el marco de Frenet de la curva $\beta(s) = \frac{1}{6}(2(1+s)^{\frac{3}{2}}, 2(1-s)^{\frac{3}{2}}, \sqrt[2]{18})$, donde $-1 < s < 1$. Haga un bosquejo del marco de Frenet en el punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$.

2.-Verifique que en una curva de rapidez unitaria se tiene $k(s)\tau(s) = |\dot{B} \cdot \dot{T}|$.

3.-Compruebe que en cada curva β de rapidez unitaria se tiene $\ddot{\beta} = -k^2T + kN + k\tau B$.

4.-En el punto $\beta(\pi c)$ encuentre la ecuación del círculo osculador de la hélice circular $\beta(s) = (a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{bs}{c})$, donde $a > 0$, $c^2 = b^2 + a^2$.

5.-Demuestre que si todos los planos osculadores de una curva tienen un punto de intersección común, la curva es plana.

6.-Demuestre que si todas las normales de la curva γ pasan por un punto fijo, entonces la curva es parte de una circunferencia.

7.-En $t = 0$, calcule el marco de Frenet de la curva $\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$ y haga un bosquejo del marco de Frenet en ese punto.

8.-Para una curva de rapidez constante $\|\dot{\gamma}(s)\| = c$, calcule el marco de Frenet en el punto $\gamma(s_0)$ en términos de $\dot{\gamma}$, $\ddot{\gamma}$, $\ddot{\gamma}$ y c .

9.-Demuestre que una curva α es plana si y solo si $\dot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha} \times \ddot{\alpha} = 0$. Diga que forma debe tener la función $f(t)$ la curva $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, f(t))$.

10.-Pruebe que las siguientes condiciones son necesarias y suficientes para que una curva sea hélice cilíndrica

- (i) Sus normales N son paralelas a un plano;

- (ii) Sus binormales B forman un ángulo constante con una dirección fija;
- (iii) Su imagen esférica es una circunferencia o parte de ella;
- (iv) La imagen esférica de sus normales es una circunferencia unitaria.

11.-Demuestre que la torsión τ_s de la imagen esférica de una curva de rapidez unitaria es

$$\tau_S = \frac{\dot{k}\tau - \dot{\tau}k}{k(k^2 + \tau^2)} \quad (2.37)$$

12.-Verifique que si β es una curva de rapidez unitaria sobre una esfera de centro $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ y radio r , entonces

$$\beta - \mathbf{c} = -\rho\mathbf{N} - \dot{\rho}\sigma\mathbf{B} \text{ donde } \rho = \frac{1}{k} \text{ y } \sigma = \frac{1}{\tau} \quad (2.38)$$

y por lo tanto $r^2 = \rho^2 + (\dot{\rho}\sigma)^2$. Recíprocamente, si $r^2 = \rho^2 + (\dot{\rho}\sigma)^2$, entonces la curva se halla sobre una esfera de radio r .

13.-Si $\gamma(s)$ es una curva de rapidez unitaria, encuentre un vector $D(s)$ tal que

$$\dot{\mathbf{T}} = D(s)\mathbf{T}$$

$$\dot{\mathbf{N}} = D(s)\mathbf{N}$$

$$\dot{\mathbf{B}} = D(s)\mathbf{B}$$

A este vector D se le llama **vector de Darboux**.

Capítulo 3

Geometría Euclidiana

3.1. Isometrías euclidianas.

Ahora, estudiaremos aquellas propiedades de las curvas que no dependen de su posición en el espacio. Utilizando el concepto de congruencia de curvas mostraremos que las funciones de curvatura y la torsión de una curva determinan la curva.

Definición 37 Una isometría euclidiana en \mathbb{R}^3 es una transformación $I : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que preserva la distancia euclidiana entre pares de puntos, es decir

$$\|I(X) - I(Y)\| = \|X - Y\| \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^3 \quad (3.1)$$

Ejemplo 38 Como ejemplos de isometrías tenemos

1.-Las **traslaciones** $T_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $A \in \mathbb{R}^3$ definidas como

$$T_A(X) = X + A \quad (3.2)$$

2.-Las **rotaciones** $R_{E,\theta} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $E \in \mathbb{R}^3$ con $\|E\| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ dada por

$$R_{E,\theta}(X) = (E \cdot X)(1 - \cos \theta)E + \cos \theta X + \sin \theta(E \times X) \quad (3.3)$$

Al vector E se le llama **eje de rotación** y a θ se le llama **ángulo de rotación**.

3.-Las **reflexiones sobre un plano** $P_N : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde $N \in \mathbb{R}^3$ con $\|N\| = 1$ y definidas por

$$P_N(X) = X - 2(N \cdot X)N \quad (3.4)$$

Al plano que pasa por el origen y tiene normal N se le llama **plano de reflexión**.

4.-**Reflexión sobre el origen.** La isometría $I(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, -x_3)$.

Ejercicio 39 Demuestre que la rotación $R_{E,\theta}$ es una isometría lineal.

Lema 40 La composición de dos isometrías euclidianas es una isometría euclidiana. Mas aún, isometría euclidiana I se puede expresar como composición de una isometría que deja fijo el origen seguida de una traslación.

Demostración. Sean I, J dos isometrías y $K = I \circ J$. Sean $X, Y \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\|K(X) - K(Y)\| = \|I(J(X)) - I(J(Y))\| = \|J(X) - J(Y)\|$$

ya que I preserva la distancia euclidiana. Pero

$$\|J(X) - J(Y)\| = \|X - Y\|$$

pues J a su vez es una isometría. Luego I es una isometría.

Para demostrar la segunda afirmación del lema, sea $A \in \mathbb{R}^3$ tal que $A = I(0)$ y sea la isometría $S = T_{-A} \circ I$, evidentemente S deja fijo el origen ya que

$$S(0) = T_{-A} \circ I(0) = T_{-A}(A) = 0.$$

Entonces $I = T_A \circ S$, lo que viene a probar el lema. ■

Ahora caracterizaremos a las isometrías que dejan fijo el origen.

Teorema 41 Sea S una isometría euclidiana que deja fijo el origen. Entonces

1.- S preserva la norma de los vectores, es decir

$$\|S(X)\| = \|X\|, \forall X \in \mathbb{R}^3 \quad (3.5)$$

2.- S preserva el producto interior entre pares de vectores. Es decir

$$S(X) \cdot S(Y) = X \cdot Y, \forall X, Y \in \mathbb{R}^3 \quad (3.6)$$

3.- S es una transformación lineal invertible.

Demostración. La afirmación 1.- se sigue de

$$\|S(X)\| = \|S(X) - S(0)\| = \|X - 0\| = \|X\|$$

La afirmación 2.- se sigue de las identidades

$$S(X) \cdot S(X) + 2S(X) \cdot S(Y) + S(Y) \cdot S(Y) = \|S(X) - S(Y)\|^2$$

$$\|S(X) - S(Y)\|^2 = \|X - Y\|^2 = X \cdot X + 2X \cdot Y + Y \cdot Y.$$

Para demostrar la linealidad, basta observar que si S es una isometría que deja fijo el origen entonces transforma bases ortonormales en bases ortonormales. Es decir, si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal, $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ $i, j=1, 2, 3$, donde δ_{ij} es la **delta de Kronecker** $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, y $\delta_{ij} = 0$ si

$i \neq j$. entonces se tiene que $\{S(e_1), S(e_2), S(e_3)\}$ es una *basis ortonormal* como consecuencia de las dos afirmaciones anteriores del teorema.

Sea ahora $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ un vector de \mathbb{R}^3 , entonces $S(X)$ se puede escribir

$$\begin{aligned} S(X) &= S(X) \cdot S(e_1)S(e_1) + S(X) \cdot S(e_2)S(e_2) + S(X) \cdot S(e_3)S(e_3) = \\ &= X \cdot e_1S(e_1) + X \cdot e_2S(e_2) + X \cdot e_3S(e_3) \end{aligned}$$

Utilizando la expresión anterior se verifica directamente que

$$S(\lambda X + Y) = \lambda S(x) + S(Y) \quad (3.7)$$

lo que prueba que S es una transformación lineal. Como toda isometría es una transformación uno a uno, de un resultado básico de álgebra lineal tenemos que S debe ser invertible y sobre el conjunto \mathbb{R}^3 . ■

En vista del teorema anterior, vemos que la clasificación de las isometrias euclidianas se reduce a la clasificación de las isometrias lineales. Estas últimas se clasifican de acuerdo al signo de su determinante en isometrias que **preservan la orientación del espacio** si su determinante es 1 y en isometrias que **no preservan la orientación del espacio** si su determinante es igual -1 .

A una isometria euclidiana de la forma $I = T_A \circ L$ con L una rotación, se le llama **isometria euclidiana que preserva la orientación**.

Ejercicio 42 Demuestre que si A es la matriz de una isometria lineal, entonces $A \circ A^T = I$. (Aquí A^T denota la matriz transpuesta de A .)

Si $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal que preserva la norma de los vectores, entonces sus valores propios solo pueden ser números complejos de norma 1. En tal sentido, los valores propios de L solo pueden ser de la forma $\alpha + i\beta$ con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Además recordemos que si $\alpha + i\beta$ es valor propio, su conjugado $\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$ también lo es. Entonces tenemos las siguientes dos clases de posibles valores propios para una isometría lineal : $\{1, \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta, \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta\}$, $\{-1, \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta, \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta\}$ con $\theta \in \mathbb{R}$. El primer caso, si $\theta \neq 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ corresponde a la rotación $R_{E,\theta}$ donde el eje de rotación E es el vector propio asociado a 1, es decir $S(E) = E$, mientras que si $\theta = 2n\pi$ tenemos $S = \text{Identidad}$. Para la clase de isometrias que tiene a -1 como valor propio tenemos los siguientes subcasos: Si $\theta = (2n + 1)\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ entonces la isometria es una reflexión sobre el origen; si $\theta = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ entonces tenemos una reflexión sobre el plano que tiene por normal N con $S(N) = -N$; y finalmente si $\theta \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, entonces $S = P_N \circ R_{N,\theta}$ donde $S(N) = -N$ y P_N es la reflexión sobre el plano de normal N . Note que las rotaciones $R_{E,\theta}$ preservan el producto interior mientras que para las reflexiones ese no es siempre el caso.

Ejercicio 43 Demuestre que la composición de dos reflexiones $P_N(\mathbf{x}), P_M(\mathbf{x})$ es una rotación. Encuentre el eje y ángulo de rotación.

Ejercicio 44 Demuestre que si A es la matriz de una isometría lineal, entonces $A \circ A^T = I$. (Aquí A^T denota la matriz transpuesta de A .)

Si $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada y L es una isometría euclidiana que preserva la orientación, entonces la curva $\delta(t) = L \circ \gamma(t)$ tiene con respecto a γ , el mismo valor para la curvatura y la torsión en los puntos correspondientes a un mismo valor del parametro t . Esto es evidente de las formulas definiciones de curvatura y torsión y de las relaciones $\delta(t) = L(\dot{\gamma}(t))$, $\ddot{\delta}(t) = L(\ddot{\gamma}(t))$, $\dddot{\delta}(t) = L(\dddot{\gamma}(t))$ y del hecho de que L preserva el producto interior y el producto vectorial entre vectores. Si la isometría L no preserva la orientación entonces solo podemos asegurar la igualdad de los valores absolutos de la curvatura y la torsión de ambas curvas en los puntos correspondientes bajo la isometría..

Ejercicio 45 Pruebe que si L preserva la orientación, entonces la curvatura $\bar{k}(t)$ y la torsión $\bar{\tau}(t)$ de $\delta(t) = L \circ \gamma(t)$ coinciden con la curvatura $k(t)$ y la torsión $\tau(t)$ de la curva γ en los puntos correspondientes.

3.2. Congruencia de curvas. Teorema fundamental de curvas.

Definición 46 Dos curvas parametrizadas de rapidez unitaria $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dicen **congruentes**, si existe una isometría euclidiana tal que $\beta = L \circ \alpha$.

La relación de congruencia entre curvas es una relacion de equivalencia. Más aún, si α y β son curvas congruentes, entonces $k_\alpha = k_\beta$ y $\tau_\alpha = \pm\tau_\beta$ en los puntos correspondientes bajo la isometría. El recíproco de esta última afirmación constituye el contenido del llamado Teorema fundamental de las curvas.

Antes de presentar el teorema en cuestión recordamos aquí el siguiente resultado que es consecuencia directa del llamado Teorema fundamental de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales.

Teorema 47 Sea el Problema de Cauchy de condición inicial

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F(t)X \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned}$$

con $X \in \mathbb{R}^n$, $F(t)$ una $n \times n$ matriz cuyas entradas son funciones acotadas en el dominio J y $t_0 \in J$. Entonces existe una única curva $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\dot{\gamma}(t) = F(t)\gamma(t) \forall t \in J$ y $\gamma(t_0) = X_0$. En particular, si el valor inicial $X_0 = 0$, entonces la unica solucion al Problema de Cauchy es $\gamma(t) = 0 \forall t \in J$

3.2. CONGRUENCIA DE CURVAS. TEOREMA FUNDAMENTAL DE CURVAS.27

Consideremos ahora el Sistema de ecuaciones diferenciales de Frenet (2.112.122.13) y escribamoslo en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \\ \dot{N}_1 \\ \dot{N}_2 \\ \dot{N}_3 \\ \dot{B}_1 \\ \dot{N}_2 \\ \dot{N}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k(t) & 0 & 0 & 0 \\ -k(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau(t) & 0 & 0 \\ 0 & -k(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau(t) & 0 \\ 0 & 0 & -k(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau(t) \\ 0 & 0 & 0 & -\tau(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau(t) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Como vemos, tenemos un sistema de nueve ecuaciones diferenciales lineales que satisface las condiciones del teorema anterior. Denotemos por $F(t)$ la 9×9 matriz que aparece en el sistema (3.8).

El sistema de Frenet tiene la siguiente propiedad de simetría que enunciamos como

Lema 48 Si $(T(t), N(t), B(t))$ es solución en J del sistema de Frenet (2.11-2.13) y $(T(t_0), N(t_0), B(t_0))$ con $t_0 \in J$ constituye una base ortonormal, entonces $(T(t), N(t), B(t))$ es una base ortonormal para todo t en J .

Demostración. Si $(T(t), N(t), B(t))$ es solución de (2.11-2.13), las funciones $\rho_1(t) = T \cdot T$, $\rho_2(t) = N \cdot N$, $\rho_3 = B \cdot B$, $\mu_1(t) = T \cdot N$, $\mu_2(t) = T \cdot B$, $\mu_3(t) = N \cdot B$ satisfacen el siguiente sistema lineal de ecuaciones deducido directamente del sistema (2.11-2.13).

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_3 \\ \dot{\mu}_1 \\ \dot{\mu}_2 \\ \dot{\mu}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2k(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2k(t) & 0 & 2\tau(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\tau(t) \\ -k(t) & k(t) & 0 & 0 & \tau(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau(t) & 0 & k(t) \\ 0 & -\tau(t) & \tau(t) & 0 & -k(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Entonces aplicando el teorema de unicidad al problema de Cauchy con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= 1, x_2(t_0) = 1, x_3(t_0) = 1, \\ y_1(t_0) &= 0, y_2(t_0) = 0, y_3(t_0) = 0. \end{aligned}$$

tenemos que las funciones

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= 1, \rho_2(t) = 1, \rho_3(t) = 1, \\ \mu_1(t) &= 0, \mu_2(t) = 0, \mu_3(t) = 0 \quad \forall t \in J. \end{aligned}$$

constituyen la única solución que satisface las condiciones iniciales y el lema se cumple. ■

Teorema 49 Fundamental de las curvas en \mathbb{R}^3 . Sean $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos curvas de rapidez unitaria tales que sus funciones de curvatura k_α y k_β coinciden $k_\alpha = k_\beta$, y sus funciones de torsión τ_α y τ_β son tales que $\tau_\alpha = \pm \tau_\beta$. Entonces las dos curvas son congruentes.

Demostración. Si las curvas α y β son dos curvas que satisfacen las condiciones del teorema, entonces ambas son soluciones de un mismo sistema de ecuaciones diferenciales, a saber el sistema de Frenet (2.112.122.13). Sea $t_0 \in (a, b)$ y consideremos el marco de Frenet $\mathcal{F}(t_0)$ de la curva α en $\alpha(t_0)$ y el marco de Frenet $\mathcal{G}(t_0)$ de la curva β en el punto $\beta(t_0)$. Sea L la isometría que transforma el marco de Frenet \mathcal{F} en el marco de Frenet \mathcal{G} . Si L preserva la orientación entonces la curva $L \circ \alpha$ es la única curva cuyo marco de Frenet satisface el sistema de Frenet y que en $L \circ \alpha(t_0)$ coincide con el marco de Frenet $\mathcal{G}(t_0)$. Entonces el teorema de existencia y unicidad implica que $L \circ \alpha(t) = \beta(t) \forall t$ y el teorema se sigue.

Si en otro caso, $\mathcal{F}(t_0)$ y $\mathcal{G}(t_0)$ no pertenecen a la misma clase de congruencia, entonces modificamos el marco de Frenet $\mathcal{G}(t_0)$ tomando $\tilde{B}(t_0) = -B(t_0)$. Ahora denotando por $\tilde{\mathcal{G}}(t_0)$ podremos encontrar una isometría L que preserve la orientación y que envíe $\mathcal{F}(t_0)$ en $\tilde{\mathcal{G}}(t_0)$. Enseguida aplicamos la reflexión P_B que deja fijo el plano (T, N) y habremos llevado $\mathcal{F}(t_0)$ en $\mathcal{G}(t_0)$. La isometría $P_B \circ L$ transforma la curva α en la curva β . ■

Capítulo 4

Calculo en espacios euclidianos.

Recordamos primero algunos de los conceptos presentados en el Capítulo 1 de estas notas, en particular el concepto de vector tangente en un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, como una pareja de la forma (\mathbf{p}, \mathbf{x}) donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. A \mathbf{p} se le llama el punto de aplicación del vector tangente y a \mathbf{x} se le llama la parte vectorial del vector tangente. El conjunto de vectores tangentes en un punto \mathbf{p} se denotó por $\mathbb{T}_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$ y constituye un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Si A es un subconjunto de \mathbb{R}^n , a la unión ajena $\mathbb{T}(A) = \cup_{\mathbf{p} \in A} (\mathbb{T}_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n)$ le llamamos el **espacio tangente a \mathbb{R}^n en el conjunto A** .

4.1. La derivada direccional.

Sea A un conjunto abierto de \mathbb{R}^n y denotemos por $C^\infty(A)$ el espacio de las funciones reales definidas en A que tengan derivadas parciales de todos los ordenes en cada punto de A . A tales funciones les llamaremos **funciones diferenciables o funciones suaves en A** . Consideremos una función $f \in C^\infty(A)$ y sea $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}, \mathbf{v})$ un vector tangente con punto de aplicación $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ y

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Definimos la **derivada direccional de f en el punto \mathbf{p} en la direccion del vector tangente $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$** como el número

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}}(f) = \left. \frac{d(f(\mathbf{p}+t\mathbf{v}))}{dt} \right|_{t=0} \quad (4.1)$$

En terminos de las derivada parciales de f y de las componentes de \mathbf{v} , podemos escribir la derivada direccional aplicando la regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas como

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}}(f) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})v_i \quad (4.2)$$

A partir de la expresion anterior es fácil demostrar las siguientes propiedades para la derivada direccional:

$$(\mathbf{v}_p + \lambda \mathbf{w}_p)(f) = \mathbf{v}_p(f) + \lambda \mathbf{w}_p(f) \quad (\text{linealidad}) \quad (4.3)$$

$$\mathbf{v}_p(f + \lambda g) = \mathbf{v}_p(f) + \lambda \mathbf{v}_p(g) \quad (\text{linealidad}), \quad (4.4)$$

$$\mathbf{v}_p(fg) = \mathbf{v}_p(f)g + f\mathbf{v}_p(g) \quad (\text{Regla de Leibnitz}); \quad (4.5)$$

$$\forall f, g \in C^\infty(A), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 50 Demuestre las propiedades de la derivada direccional antes enunciadas

Lema 51 (Regla de la cadena) Sean $g_1, g_2, \dots, g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Sea \mathbf{v}_p un vector tangente en $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Escribamos la funcion $f = F(g_1, g_2, \dots, g_k)$. Entonces

$$\mathbf{v}_p(f) = \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial F}{\partial u_j}(g_1(\mathbf{p}), g_2(\mathbf{p}), \dots, g_k(\mathbf{p})) \mathbf{v}_p(g_j) \quad (4.6)$$

Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, de la definición de derivada direccional, tenemos

$$\mathbf{v}_p(f) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) v_i$$

Demostración. Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial F}{\partial u_j}(g_1(\mathbf{p}), g_2(\mathbf{p}), \dots, g_k(\mathbf{p})) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sustituyendo esta ultima formula en la anterior obtenemos

$$\mathbf{v}_p(f) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial F}{\partial u_j}(g_1(\mathbf{p}), g_2(\mathbf{p}), \dots, g_k(\mathbf{p})) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{p}) v_i \quad (4.7)$$

$$= \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial F}{\partial u_j}(g_1(\mathbf{p}), g_2(\mathbf{p}), \dots, g_k(\mathbf{p})) \mathbf{v}_p(g_j) \quad (4.8)$$

■

4.2. La diferencial de una función.

Consideremos una función $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ con A conjunto abierto de \mathbb{R}^n y escribámosla como

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_k) \quad (4.9)$$

donde

$$f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, k \quad (4.10)$$

A las funciones f_i se les llama las **funciones coordenadas** de F .

Definición 52 Diremos que $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ es **diferenciable** en el abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ si cada una de sus funciones coordenadas es diferenciable en cada punto $\mathbf{p} \in A$. Si $F : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ y B es un subconjunto arbitrario, diremos que F es diferenciable en B si existe un conjunto abierto $U \supset B$ y una función $\tilde{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciable en U y tal que $\tilde{F}(\mathbf{q}) = F(\mathbf{q})$, $\forall \mathbf{q} \in U$. Un difeomorfismo entre dos conjuntos abiertos A y U de \mathbb{R}^n es una función $F : A \rightarrow U$ tal que es uno a uno y sobre y diferenciable y su inversa $F^{-1} : U \rightarrow A$ es también diferenciable.

Lema 53 (Regla de la cadena) Supongamos las funciones F y G

$$A \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{F} B \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{G} \mathbb{R}^s$$

son diferenciables en A y B respectivamente. Entonces la función composición $G \circ F : A \rightarrow \mathbb{R}^s$ es diferenciable.

Ejercicio 54 Demuestre el lema (53).

Cada función diferenciable $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ establece una función lineal entre los espacios tangentes de \mathbb{R}^n con punto de aplicación en A y los espacios tangentes a \mathbb{R}^k con punto de aplicaciones en $f(A)$.

Para mostrar este hecho notemos que para cada vector tangente $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}, \mathbf{v})$

con $\mathbf{p} \in A$ la función compuesta $t \rightarrow F(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ define una función diferenciable.

Definición 55 Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ una función diferenciable en el abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{p} \in A$. Definimos **la diferencial de F en \mathbf{p}** como la función lineal

$$DF_{\mathbf{p}} : \mathbb{T}_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}_{F(\mathbf{p})}\mathbb{R}^k$$

$$DF_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = (F(\mathbf{p}), \frac{dF(\mathbf{p} + t\mathbf{v})}{dt}(0)) \quad (4.11)$$

Tomando en cuenta que

$$\frac{d(F(\mathbf{p} + t\mathbf{v}))}{dt}(0) = \left(\frac{df_1(\mathbf{p} + t\mathbf{v})}{dt}(0), \frac{df_2(\mathbf{p} + t\mathbf{v})}{dt}(0), \dots, \frac{df_k(\mathbf{p} + t\mathbf{v})}{dt}(0) \right)$$

obtenemos que la diferencial se calcula mediante la fórmula

$$DF_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = (F(\mathbf{p}), \mathbf{v}_{\mathbf{p}}(f_1), \mathbf{v}_{\mathbf{p}}(f_2), \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{p}}(f_k)) \quad (4.12)$$

Ejercicio 56 Demuestre que $DF_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}_{\mathbf{p}} + \lambda \mathbf{w}_{\mathbf{p}}) = DF_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) + \lambda DF_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}_{\mathbf{p}})$, es decir,

la diferencial es una funcion lineal de $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n \rightarrow T_{F(\mathbf{p})}\mathbb{R}^n$.

Si la funcion $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tiene diferencial en cada uno de los puntos del abierto A diremos que es **diferenciable en \mathbf{A}** y en ese caso escribiremos la diferencial como una funcion del espacio tangente en A

$$DF : TA \rightarrow T\mathbb{R}^k \quad (4.13)$$

$$DF(v_{\mathbf{p}}) = DF_{\mathbf{p}}(v_{\mathbf{p}}), \quad \forall \mathbf{p} \in A \quad (4.14)$$

Si $\gamma : (a, b) \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ es una curva diferenciable con valores en un abierto A , la diferencial de γ en el punto $t_0 \in (a, b)$ valuada en el vector tangente $(\mathbf{p}, 1)$ se calcula mediante la formula (4.12)

$$D\gamma_{t_0}(1_{t_0}) = (\gamma(t_0), \frac{d\gamma(t_0+t)}{dt}(0)) = (\gamma(t_0), \frac{d\gamma}{dt}(t_0)) \quad (4.15)$$

que no es otra cosa que el vector tangente a la curva en el punto $\gamma(t_0)$. Ahora si tenemos una función diferenciable en A $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, la diferencial de F en $\mathbf{p} = \gamma(t_0)$ valuada en el vector tangente $(\gamma(t_0), \frac{d\gamma}{dt}(t_0))$ es el vector tangente a la curva $F \circ \gamma$ en el punto $F \circ \gamma(t_0)$. Note que $F \circ \gamma$ es una curva en $F(A)$. Para mostrar lo anterior, utilizando la fórmula (4.12??) tenemos

$$\begin{aligned} D(F \circ \gamma)(t_0, 1) &= ((F \circ \gamma)(t_0), \frac{d(f_1 \circ \gamma)}{dt}(t_0), \frac{d(f_2 \circ \gamma)}{dt}(t_0), \dots, \frac{d(f_k \circ \gamma)}{dt}(t_0)) = \\ &= ((F \circ \gamma)(t_0), (\frac{d(\gamma)}{dt}(t_0))(f_1), (\frac{d(\gamma)}{dt}(t_0))(f_2), \dots, (\frac{d(\gamma)}{dt}(t_0))(f_k)) = \\ &= ((F \circ \gamma)(t_0), \frac{d(F \circ \gamma)}{dt}(t_0)) = DF(\gamma(t_0), \frac{d\gamma}{dt}(t_0)) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Teorema 57 (Regla de la cadena). Sean $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $G : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$, funciones diferenciables donde U y V son conjuntos abiertos con $F(U) \subset V$. Sea $\mathbf{p} \in U$ y $F(\mathbf{p}) = \mathbf{q} \in V$. Entonces la funcion compuesta $G \circ F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ es diferenciable en $\mathbf{p} \in U$ y

$$D(G \circ F)(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = DG \circ D(F)(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \quad (4.17)$$

Demostración. Consideremos en U la curva $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \in A$. Bajo la funcion F esta curva se mapea en la curva $F \circ \gamma \in F(A)$ y esta ultima a su vez bajo la función G en la curva $G(F(\gamma))$. Mas aun, utilizando la formula 4.16 con $t_0 = 0$ y $v_{\mathbf{p}} = \gamma(0)$ escribimos

$$\begin{aligned} D(G \circ F)(\mathbf{p}, \mathbf{v}) &= D((G \circ F) \circ \gamma)(0, 1) = D(G \circ (F \circ \gamma))(0, 1) = \\ &= DG(F \circ \gamma(0), \frac{d(F \circ \gamma)}{dt}(0)). \end{aligned}$$

Ademas por la misma formula 4.16 tenemos

$$((F \circ \gamma)(0), \frac{d(F \circ \gamma)}{dt}(0)) = DF(\gamma(0), \frac{d\gamma}{dt}(0))$$

y sustituyendo en la primera formula obtenemos

$$\begin{aligned} D(G \circ F)(\mathbf{p}, \mathbf{v}) &= DG(F \circ \gamma(0), \frac{d(F \circ \gamma)}{dt}(0)). = \\ &= DG(DF(\gamma(0), \frac{d\gamma}{dt}(0)) = DG \circ DF(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

■

Como hemos observado, la diferencial de una función $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ transforma cada vector tangente $v_{\mathbf{p}}$ en el punto $\mathbf{p} \in \mathbf{A} \subset \mathbb{R}^n$ en un vector tangente $DF(v_{\mathbf{p}})$ en el punto $F(\mathbf{p}) \in F(A) \subset \mathbb{R}^k$. Siendo esta transformación una función lineal de un espacio vectorial de dimensión n en un subespacio vectorial de dimensión k , para cada elección de bases en cada uno de esos espacios vectoriales, la diferencial DF tiene asociada una $n \times m$ matriz que a continuación describimos. Si $\mathcal{B}_{\mathbf{p}} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{e}_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ y $\mathcal{C}_{F(\mathbf{p})} = \{(F(\mathbf{p}), \mathbf{e}_j), j = 1, \dots, k\}$, denotan la base canónica en el espacio vectorial $\mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathbb{T}_{F(\mathbf{p})}(\mathbb{R}^k)$ respectivamente, tenemos que

$$DF(\mathbf{p}, \mathbf{e}_i) = (F(\mathbf{p}), \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}), \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{p}), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{p})).$$

Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, el valor de la diferencial $DF(\mathbf{p}, \mathbf{v})$ se calcula mediante la formula

$$DF(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

A la matriz en (4.18) se le llama la **matriz jacobiana** de F en \mathbf{p} .

4.3. Campos vectoriales.

Definición 58 Un **campo vectorial** en un abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ es una función $X : A \rightarrow \mathbb{T}(A)$ tal que $X(\mathbf{p}) \in \mathbb{T}_{\mathbf{p}}(A)$ para todo $\mathbf{p} \in A$. Un campo vectorial tiene la forma

$$X(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}, X_1(\mathbf{p}), X_2(\mathbf{p}), \dots, X_n(\mathbf{p}))$$

donde $X_i, i = 1, \dots, n$ son funciones reales definidas en A . Si cada una de las funciones componentes del campo X tienen derivadas parciales continuas hasta orden r , el campo X se dice de clase C^r en A .

Denotaremos por $\mathcal{X}(A)$ el conjunto de los campos vectoriales definidos en el abierto A . En $\mathcal{X}(A)$ definimos las operaciones de suma de campos y de producto por una función

$$(X + Y)(\mathbf{p}) \stackrel{def}{=} (\mathbf{p}, X_1(\mathbf{p}) + Y_1(\mathbf{p}), X_2(\mathbf{p}) + Y_2(\mathbf{p}), \dots, X_n(\mathbf{p}) + Y_n(\mathbf{p})) \quad (4.19)$$

$$(hX)(\mathbf{p}) \stackrel{def}{=} (\mathbf{p}, h(\mathbf{p})X_1(\mathbf{p}), h(\mathbf{p})X_2(\mathbf{p}), \dots, h(\mathbf{p})X_n(\mathbf{p})) \quad (4.20)$$

Graficamente, un campo vectorial se representa, dibujando en cada punto $\mathbf{p} \in A$ el vector ahí anclado con componentes $(X_1(\mathbf{p}), X_2(\mathbf{p}), \dots, X_n(\mathbf{p}))$.

figura

Cada campo vectorial X actúa sobre las funciones diferenciables en A . si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, se define la **derivada de Lie de f a lo largo del campo X** como la función

$$\begin{aligned} L_X f &: A \rightarrow \mathbb{R} \\ L_X f(\mathbf{p}) &= X(\mathbf{p})(f) \end{aligned} \quad (4.21)$$

La derivada de Lie tiene las siguientes propiedades:

$$L_X(\lambda f + g) = \lambda L_X f + L_X g, \forall \lambda \in \mathbb{R}; f, g \in C^\infty(A). \quad \text{(linealidad)} \quad (4.22)$$

$$L_X(fg) = (L_X f)g + f(L_X g), \forall f, g \in C^\infty(A) \quad \text{(Regla de Leibnitz)} \quad (4.23)$$

$$L_{fX}g = fL_Xg, \forall f, g \in C^\infty(A), X \in \mathcal{X}(A). \quad (4.24)$$

En terminos de las funciones coordenadas, la derivada de Lie se escribe

$$L_X f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) X_i(\mathbf{p}) \quad (4.25)$$

Ejercicio 59 Probar que todo operador sobre funciones que satisface las propiedades (4.22, 4.23), corresponde a la derivada de Lie a lo largo de algun campo vectorial X en A . Encuentre el campo X .

Definición 60 Las **funciones coordenadas naturales de \mathbb{R}^n** son las funciones $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ definidas como

$$u_i(\mathbf{p}) = \mathbf{p}_i \quad (4.26)$$

si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Definición 61 Los campos vectoriales U_j en \mathbb{R}^n $j = 1, 2, \dots, n$ definidos como

$$U_j(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad (4.27)$$

donde 1 aparece en el j -ésimo lugar, forman una base en cada espacio tangente $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$ que se llama la **base canonica**.

En general, si $\mathcal{B} = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ es una base de \mathbb{R}^n , la base de campos vectoriales con elementos

$$\tilde{V}_j(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}, V_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (4.28)$$

se denomina una **base paralela** de campos vectoriales.

La derivada de Lie a lo largo del campo U_j de la base canonica valuada en la funcion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ toma la expresion

$$L_{U_j} f(\mathbf{p}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{p}). \quad (4.29)$$

Si X es un campo vectorial en $A \subset \mathbb{R}^n$, se expresa en cada punto como combinaci3n lineal de los elementos de la base canonica de campos vectoriales

$$X = \sum_{i=1}^n L_X u_i U_i \quad (4.30)$$

Definici3n 62 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funcion diferenciable, se define el **campo gradiente de g** como el campo

$$(\mathbf{grad} f)(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) U_i(\mathbf{p}) \quad (4.31)$$

Note que en terminos del campo gradiente, la derivada de Lie se escribe con la formula

$$L_X f = (\mathbf{grad} f) \cdot X \quad (4.32)$$

4.4. Derivadas de campos vectoriales en \mathbb{R}^n .

Uno de los conceptos mas importantes en geometría, es la derivacion de campos vectoriales. Sea pues X un campo vectorial definido en un abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{C} = \{W_1, W_2, \dots, W_n\}$ una base paralela de campos. En terminos de esa base, X se escribe

$$X = \sum_{i=1}^n h_i W_i \quad (4.33)$$

donde h_i , $i = 1, \dots, n$ son funciones reales definidas en A . Se define la **derivada covariante de X** a lo largo del vector tangente en $Y(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}, Y_{\mathbf{p}})$ como el vector $\nabla_Y X(\mathbf{p})$ en el punto \mathbf{p} dado por

$$(\nabla_Y X)(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{L}_Y h_i(\mathbf{p})) W_i(\mathbf{p}) \quad (4.34)$$

Observaci3n 63 Note que la derivada covariante de todo campo paralelo a lo largo de cualquier campo vectorial es cero.

Como propiedades de la derivada covariante tenemos las siguientes:

Lema 64 Sean en $A \subset \mathbb{R}^n$, X, Y campos vectoriales, V y W vectores tangentes en el punto \mathbf{p} , y λ, μ funciones diferenciables y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\nabla_{aV+bW}X = a\nabla_VX + b\nabla_WX; \quad (4.35)$$

$$\nabla_V(\lambda X + \mu W) = \lambda\nabla_VX + \mu\nabla_VY \quad (4.36)$$

$$\nabla_V(\lambda X) = (L_V\lambda)X + \lambda\nabla_VX \quad (4.37)$$

$$L_V(X \cdot Y) = (\nabla_VX) \cdot Y + X \cdot (\nabla_VY) \quad (4.38)$$

Ejercicio 65 Demuestre el lema anterior.

Capítulo 5

Superficies. Cálculo sobre superficies.

5.1. Parametrización de Superficies.

Definición 66 Un subconjunto S de \mathbb{R}^3 se dice que forma una **superficie regular** si para cada punto \mathbf{p} en S existe una vecindad abierta V de \mathbb{R}^3 y una función $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$, donde U es una vecindad abierta de \mathbb{R}^2 , tal que satisfacen las siguientes condiciones:

- i.- La función $\Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v))$ es diferenciable, es decir cada una de las funciones componente $\Phi_i, i = 1, 2, 3$. tienen parciales continuas en cada punto de U ,
- ii).-La función Φ es un homomorfismo, es decir, Φ es uno a uno y sobre en $V \cap S$ y tiene inversa $\Phi^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que es continua,
- iii).- La matriz jacobiana

$$J(\Phi)(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

tiene rango 2. Esto es, para cada punto $(u, v) \in U$, $J(\Phi)(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un operador lineal uno a uno, o equivalentemente $\text{Kernel de } J(\Phi) = \{0\}$. A esta ultima condicion se le llama de **regularidad**.

A la función $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ se le llama **carta coordenada** o una **parametrización local** de S . Para denotar la carta coordenada anterior, escribiremos la pareja (U, Φ) con U el dominio de Φ .

Al conjunto de cartas coordenadas \mathcal{A} que cubren a la superficie se le llama un **Atlas** de cartas coordenadas

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \Phi_\alpha) \text{ con } S = \cup_\alpha U_\alpha\} \quad (5.2)$$

Observación 67 *La condición de que la carta sea uno a uno evita que la superficie se corte a sí misma; la regularidad obliga a que en cada punto exista el plano tangente evitando dobleces y picos, la diferenciabilidad y que el conjunto U sea abierto hacen que la superficie sea suave sin bordes u orillas.*

Observación 68 *Cada carta coordenada asigna coordenadas en el plano a cada punto de un pedazo P de la superficie. Al punto $p = \Phi(u, v)$ de la superficie, se le asigna las coordenadas (u, v) en el plano. En particular cada curva $\gamma(t)$ en P es la imagen bajo Φ de una curva $\alpha(t)$ en el dominio de Φ ,*

$$\gamma(t) = \Phi(\alpha(t))$$

La carta coordenada nos permite representar partes de la superficie en el plano igual como se hace en cartografía para representar regiones de la tierra mediante mapas o cartas geograficas.

Note que cada carta coordenada (U, Φ) permite representar cada punto \mathbf{p} de la parte de la superficie parametrizada por Φ , mediante las coordenadas del punto $\Phi^{-1}(\mathbf{p})$ perteneciente al abierto U contenido en el plano \mathbb{R}^2 . Si dos cartas (U_1, Φ_1) , (U_2, Φ_2) son tales que $W = \Phi_1(U_1) \cap \Phi_2(U_2) \neq \emptyset$, entonces los puntos de la superficie pertenecientes a $S \cap W$, tendran dos representaciones, a saber $\Phi_1^{-1}(\mathbf{p})$ y $\Phi_2^{-1}(\mathbf{p})$. En el caso anterior, la función

$$\begin{aligned} \Psi_{12} &: \Phi_1^{-1}(W) \rightarrow \Phi_2^{-1}(W) \\ \Psi_{12} &= \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

es una función entre abiertos del plano que asocia a las coordenadas de un punto $\mathbf{p} \in S$ bajo la parametrización (U_1, Φ_1) sus coordenadas bajo la parametrización (U_2, Φ_2) . A Ψ_{12} se le llama la función de **cambio de coordenadas**.

Proposición 69 *La función de cambio de coordenadas 5.3 es un difeomorfismo. Es decir, es uno a uno, es sobre y tanto ella como su inversa son funciones diferenciables.*

La demostración de la proposición anterior se basa en el llamado Teorema de la función inversa que puede consultarse en [].

Finalizamos este primer apartado con las siguientes definiciones fundamentales,

Definición 70 *Si $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{p} \in S$, diremos que f es diferenciable en el punto p si para cada carta coordenada (U, Φ) con $\mathbf{p} = \Phi(u_0, v_0)$ la función $f \circ \Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto (u_0, v_0) .*

Definición 71 *Una función $F : S_1 \rightarrow S_2$ con S_1, S_2 superficies, es **diferenciable en el punto** $\mathbf{p} \in S_1$, si para par de cartas (U, Φ) sobre S_1 y (V, Ψ) sobre S_2 y tales que $\mathbf{p} \in \Phi(U) \cap \Psi(V) = W$, la función*

$$\Psi^{-1} \circ F \circ \Phi : \Phi^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \quad (5.4)$$

es una funcion diferenciable en $\Phi^{-1}(\mathbf{p})$. Una funcion $F : S_1 \rightarrow S_2$ se dice **diferenciable en un conjunto** $A \subset S_1$, si es diferenciable en cada punto de A . Una funcion diferenciable $F : S_1 \rightarrow S_2$ es un **difeomorfismo entre S_1 y S_2** si es uno a uno y sobre y tiene inversa diferenciable. Dos superficies se dicen **difeomorfos** si existe un difeomorfismo de una en la otra. Se define la **diferencial** de F como la aplicacion $DF : \mathbb{T}S_1 \rightarrow \mathbb{T}S_2$ que transforma el vector tangente $(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \in \mathbb{T}S_1$ en el vector tangente $(F(\mathbf{p}), \mathbf{w})$ a S_2 donde

$$\mathbf{w} = \frac{d}{ds} \mathbf{F}(\gamma(s)) \Big|_{s=0} \text{ donde}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\gamma} \Big|_{s=0}, \text{ y } \gamma : (-a, a) \rightarrow S_1, \text{ con } \gamma(0) = \mathbf{p}.$$

5.2. Ejemplos de superficies.

5.2.1. Superficies cilindricas.

Son las generadas por una recta L en el espacio que se mueve paralelamente sobre una curva plana $\delta(t)$, llamada **directriz**. La generatriz nunca queda en el plano de la directriz.

Si L es paralela al vector (b_1, b_2, b_3) y $\delta(t) = (a_1(t), a_2(t), 0)$ es la generatriz, una carta coordenada esta dada por

$$\Phi(u, v) = (a_1(u), a_2(u), 0) + v(b_1, b_2, b_3).$$

Note que la condición de regularidad se satisface si la curva $\delta(t)$ es a su vez regular, es decir su vector tangente nunca se anula. Cuando la generatriz es perpendicular al plano de la directriz, el cilindro se denomina **recto**, y **oblicuo** en caso contrario. Los cilindros pueden ser circulares, elipticos, hiperbolicos, segun sea la directriz.

Ejemplo 72 : La carta de coordenadas $\Phi(u, v) = (\text{Cos}(u) + 2v, \text{Sen}(u) + 3v, v)$ define un cilindro circular obliquo cuya directriz es el circulo $\delta(t) = (\text{Cos}(t), \text{Sen}(t), 0)$ $0 < t < 2\pi$, y cuya generatriz es paralela a $(2, 3, 1)$. La condicion de regularidad es facilmente verificable ya que la matriz jacobiana se escribe en este caso como

$$\text{Jac}\Phi = \begin{bmatrix} -\text{Sen}(u) & 2 \\ \text{Cos}(u) & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y para todo valor de u las columnas de la matriz son linealmente independientes y por lo tanto siempre el rango es igual a 2.

5.2.2. Superficies regladas.

Son aquellas en las que por cada uno de sus puntos pasa una recta o **regla** totalmente contenida en la superficie.

Existen dos formas de escribir cartas para estas superficies:

$$\Phi(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$$

o bien

$$\Phi(u, v) = \alpha(v) + u\beta(v)$$

Ejemplo 73 *El hiperboloide de revolución tiene por carta*

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) &: (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \Phi(u, v) &= (\text{Cos}(u) + v\text{Sen}(u), \text{Sen}(u) + v\text{Cos}(u), 1)\end{aligned}$$

El paraboloid hiperbolico $z = xy$ es una superficie doblemente reglada, es decir por cada uno de sus puntos pasan dos rectas distintas contenidas en la superficie:

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \Phi(u, v) &= (u, v, uv) = (u, 0, 0) + v(0, 1, u),\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \Phi(u, v) &= (u, v, uv) = (0, v, 0) + u(1, 0, v)\end{aligned}$$

5.2.3. Superficies de revolución.

Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva contenida en un plano P sin autointersecciones y L una recta en P sin intersecciones con la traza de la curva α . A la superficie obtenida al rotar la traza de la curva α alrededor de la recta L se llama **superficie de revolución**.

Ejemplo 74 *La superficie de revolución obtenida al rotar la curva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $a > 0$ y $\alpha(t) = (0, t, f(t))$ donde $f(t) > 0$, alrededor de la recta generada por el vector $e_2 = (0, 1, 0)$ tiene por parametrización*

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) &= (a, b) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \Phi(u, v) &= (f(u)\text{Cos}(v), u, f(u)\text{Sen}(v))\end{aligned}$$

- 1.- Si $f(t) = m(t - a)$ la superficie de revolución obtenida es un **cono recto** con vértice en $(0, a, 0)$ de altura $b - a$ y radio $m(b - a)$.
- 2.- La **esfera** de radio r sin dos polos es una superficie de revolución que se puede obtener al rotar la curva $\alpha : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(\theta) = (0, r\text{Cos}\theta, r\text{Sen}\theta)$ alrededor de la recta generada por el vector $(0, 1, 0)$. Una parametrización de la esfera de radio r es

$$\begin{aligned}\Phi(\theta, \phi) &= (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \Phi(u, v) &= (r\text{Cos}(\theta)\text{Cos}(\phi), r\text{Cos}(\theta)\text{Sen}(\phi), u, r\text{Sen}(\theta))\end{aligned}$$

5.2.4. Superficies como gráficas de funciones.

La gráfica de una función diferenciable $h : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con A abierto, es el conjunto de \mathbb{R}^3

$$\text{Graf}(h) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A \text{ y } z = h(x, y)\} \quad (5.5)$$

La gráfica de h resulta una superficie que tiene como cartas coordenada (A, Φ) con

$$\Phi(u, v) = (u, v, h(u, v)) \quad (5.6)$$

5.2.5. Superficies de nivel

Si $F : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto, es una función diferenciable y $c \in F(A)$ al conjunto

$$F^{-1}(c) = \{\mathbf{x} \in A, \text{ tales que } F(\mathbf{x}) = c\} \quad (5.7)$$

se le llama el **conjunto de nivel asociado al valor c** . El conjunto $F^{-1}(c)$ determina una superficie regular bajo la siguiente condición

Proposición 75 *Si el gradiente de F no se anula en $F^{-1}(c)$, entonces $F^{-1}(c)$ determina una superficie regular.*

La demostración de la proposición anterior es consecuencia del llamado Teorema de la función implícita cuya demostración se puede consultar en cualquier libro de cálculo diferencial de varias variables como []. En nuestro caso solo lo enunciaremos para funciones reales definidas en el espacio \mathbb{R}^3 .

Teorema 76 (de la función implícita.) *Supongamos que $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable en un abierto del punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $G(\mathbf{x}_0) = 0$. Si $\text{grad}G(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ y $\frac{\partial G}{\partial x}(\mathbf{x}_0) \neq 0$, entonces existe una vecindad $V \subset \mathbb{R}^2$ de (y_0, z_0) y un abierto $I = (x_0 - c, x_0 + c)$ tales que para cada punto $(y, z) \in V$ existe un único punto $h(y, z) \in I$ tal que $G(h(y, z), y, z) = 0$. Mas aún, la función $h : V \rightarrow I$, llamada la función implícita es diferenciable.*

Tomando en cuenta el teorema anterior, vemos entonces que cada solución $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de la ecuación $G(x, y, z) = 0$ posee la vecindad $V \times I \subset \mathbb{R}^3$ y la parametrización $\Phi : V \rightarrow V \times I$ con $\Phi(y, z) = (h(y, z), y, z)$ que hacen del conjunto de soluciones una superficie en el sentido de la definición dada al inicio de este capítulo. Note que localmente el conjunto de soluciones de $G(x, y, z) = 0$ se ve como la gráfica de la función implícita h .

Ejemplo 77 *Para $a, b, c \neq 0$, las siguientes funciones definen superficies regulares en el conjunto de nivel asociado al valor 0.*

(i) **Elipsoide**, $G(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$;

(ii) **Hiperboloide de dos hojas**, $G(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$;

(iii) Si $0 < r < a$ **Toro**, $G(x, y, z) = z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 - r^2$

5.3. El plano tangente

Dada una carta de coordenadas Φ de una superficie, las curvas sobre la superficie $\alpha(t) = \Phi(u_0 + t, v_0)$ y $\beta(t) = \Phi(u_0, v_0 + t)$ las llamaremos Φ -**curva coordenadas** por el punto $\mathbf{p} = \Phi(u_0, v_0)$. Los vectores tangentes a dichas curvas en $t = 0$ definen vectores tangentes a la superficie que denotaremos respectivamente por $\Phi_u(u_0, v_0)$ y $\Phi_v(u_0, v_0)$. Es decir

$$\Phi_u(u_0, v_0) = \dot{\alpha}(0) = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) \Big|_{(u_0, v_0)} \quad (5.8)$$

$$\Phi_v(u_0, v_0) = \dot{\beta}(0) = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right) \Big|_{(u_0, v_0)} \quad (5.9)$$

Observación 78 Note que si $\delta(t) = (\delta_1(t), \delta_2(t))$ es una curva en el dominio de la carta de coordenadas Φ y con $\delta(0) = (u_0, v_0)$, entonces el vector tangente T a la curva sobre la superficie $\Phi(\delta(t))$ en el punto $\mathbf{p} = \Phi(u_0, v_0)$ se escribe

$$T = \dot{\delta}_1(0)\Phi_u(u_0, v_0) + \dot{\delta}_2(0)\Phi_v(u_0, v_0)$$

Mas aun, cada vector (\mathbf{p}, \mathbf{x}) tangente a la superficie en $\mathbf{p} = \Phi(u_0, v_0)$ es de la forma

$$\mathbf{x} = a\Phi_u(u_0, v_0) + b\Phi_v(u_0, v_0), \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \quad (5.10)$$

Proposición 79 Una funcion $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ satisface la condicion de regularidad si y solo si

$$\Phi_u \times \Phi_v \neq \mathbf{0} \text{ en } U \quad (5.11)$$

Demostración. Note que la matriz jacobiana 4.18 tiene por columnas precisamente Φ_u, Φ_v . Por lo tanto el rango de esa matriz sera dos si y solo si estas columnas son linealmente independientes, lo cual es equivalente a que su producto vectorial $\Phi_u \times \Phi_v$ sea distinto del vector cero en cada punto de U . ■

De lo anterior se sigue que para cada carta coordenada (U, Φ) , en cada punto $\mathbf{p} = \Phi(u, v)$ de la superficie S , el vector $\Phi_u \times \Phi_v(u, v)$ resulta ser ortogonal a los vectores tangentes a la superficie por \mathbf{p} . Al campo vectorial sobre S

$$N(u, v) = \left(\Phi(u, v), \frac{\Phi_u \times \Phi_v(u, v)}{\|\Phi_u \times \Phi_v(u, v)\|} \right) \quad (5.12)$$

se le denomina el **campo unitario normal a S** .

Proposición 80 Si $\mathbf{p} \in S$ y $(U_1, \Phi_1), (U_2, \Phi_2)$ son dos cartas coordenadas cuyas imagenes contienen a \mathbf{p} , $\Phi_1(u_1, v_1) = \Phi_2(u_2, v_2) = \mathbf{p}$, entonces

$$\frac{\Phi_{1u} \times \Phi_{1v}}{\|\Phi_{1u} \times \Phi_{1v}\|}(u_1, v_1) = \pm \frac{\Phi_{2u} \times \Phi_{2v}}{\|\Phi_{2u} \times \Phi_{2v}\|}(u_2, v_2) \quad (5.13)$$

campo unitario normal a S .

Demostración. De la expresión $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$, escribamos $\Psi = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ donde $\Psi : \Phi_1^{-1}(W) \rightarrow \Phi_2^{-1}(W)$ con $W = \Phi_1(U_1) \cap \Phi_2(U_2)$ es una función diferenciable de un abierto de \mathbb{R}^2 con valores en un abierto de \mathbb{R}^2 .

Escribamos $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ con $\psi_i : \Phi_1^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Utilizando la regla de la cadena obtenemos,

$$\begin{aligned}\Phi_{1u}(u, v) &= \Phi_{2u}(\Psi(u, v)) \frac{\partial \psi_1}{\partial u}(u, v) + \Phi_{2v}(\Psi(u, v)) \frac{\partial \psi_2}{\partial u}(u, v) \\ \Phi_{1v}(u, v) &= \Phi_{2u}(\Psi(u, v)) \frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u, v) + \Phi_{2v}(\Psi(u, v)) \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u, v)\end{aligned}$$

tomando el producto vectorial obtenemos

$$\Phi_{1u} \times \Phi_{1v}(u, v) = \Phi_{2u} \times \Phi_{2v}(\Psi(u, v)) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial v} - \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial u} \right)(u, v)$$

ahora, tomando norma en ambos lados tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\|\Phi_{1u} \times \Phi_{1v}(u, v)\|}{\|\Phi_{1u} \times \Phi_{1v}(u, v)\|} &= \frac{Jac(\Psi)(u, v)}{|Jac(\Psi)(u, v)|} \frac{\Phi_{2u} \times \Phi_{2v}(\Psi(u, v))}{\|\Phi_{2u} \times \Phi_{2v}(\Psi(u, v))\|} \\ &= \pm \frac{\Phi_{2u} \times \Phi_{2v}(\Psi(u, v))}{\|\Phi_{2u} \times \Phi_{2v}(\Psi(u, v))\|}\end{aligned}$$

■

Observación 81 De la proposición anterior, tenemos que en el dominio de cada carta coordenada de S , esta definida la función que asocia a cada punto ahí un vector de norma uno llamado la normal a S . La normal es pues una función diferenciable con dominio un abierto de S y contradominio la esfera unitaria en \mathbb{R}^3

Definición 82 Sea S una superficie regular y $\mathbf{p} \in S$. Sea (U, Φ) una carta coordenada de S con $\mathbf{p} = \Phi(u_0, v_0)$. Se define el **plano tangente a S en \mathbf{p}** al subespacio $\mathbb{T}_{\mathbf{p}}S \subset \mathbb{T}_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^3$ definido como

$$\mathbb{T}_{\mathbf{p}}S = \{(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \in \mathbb{T}_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^3 \mid N(u_0, v_0) \cdot \mathbf{x} = 0\} \quad (5.14)$$

Note que el plano tangente es un subespacio vectorial cuyos elementos (\mathbf{p}, \mathbf{x}) son de la forma

$$\mathbf{x} = a\Phi_u(u_0, v_0) + b\Phi_v(u_0, v_0), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

A la pareja de números reales (a, b) se le llama las **coordenadas del vector tangente \mathbf{x}** relativas a la carta coordenada (U, Φ)

5.4. Superficies orientables.

Como se deduce de la proposición anterior, que el campo normal N a la superficie puede no estar definido en toda la superficie. Puede darse el caso que la normal N en un punto $\mathbf{p} \in S$, calculada usando una carta local (U_1, Φ_1) tenga

direccion contraria a la normal calculada usando una segunda carta (U_2, Φ_2) . Al no haber una normal unica en cada punto que defina una noción de "adentro" y de "afuera", la superficie se denomina **no-orientable**. Mas concretamente, demos la siguiente definicion

Definición 83 Una superficie S se dice **orientable** si posee un atlas de cartas coordenadas, tal que para cada par de ellas (U_1, Φ_1) , (U_2, Φ_2) con $W = \Phi_1(U_1) \cap \Phi_2(U_2) \neq \emptyset$, la funcion de cambio de coordenadas $\Psi_{12} = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ sea tal que $Jac(\Psi_{12}) > 0$.

Ejemplo 84 (La Banda de Moebius) Esta superficie se construye de la siguiente manera: Consideremos en \mathbb{R}^3 la base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ y la recta $\delta(s) = \mathbf{e}_1 + u\mathbf{e}_3$ con $u \in \mathbb{R}$. Hagamos girar esta recta alrededor del eje \mathbf{e}_1 por un angulo πv y enseguida rotemosla alrededor del eje \mathbf{e}_3 un angulo $2\pi v$. Bajo las dos rotaciones, la recta $\delta(u)$ al girar un angulo $\theta = 2\pi v$ alrededor del eje \mathbf{e}_3 experimenta a la vez una torcedura o rotación de $\frac{\theta}{2} = \pi v$ alrededor del otro eje \mathbf{e}_1 . Asi, los puntos de la superficie formada se representan por el conjunto

$$BM = \{R_{e_3, 2\pi v} \circ R_{e_1, \pi v}(e_1 + ue_3) \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\} \quad (5.15)$$

donde $R_{E, \theta}$ es la rotacion con eje E y angulo θ (3.3) o equivalentemente

$$BM = \{\Phi(u, v) = (\cos(2\pi v) + u\sin(2\pi v) \sin(\pi v), \sin(2\pi v) - u\cos(2\pi v) \sin(\pi v), u\cos(\pi v))\}$$

Figura de Seccion de Banda de Moebius.

Sobre la Banda de Moebius, no es posible definir continuamente un campo normal, por ejemplo si tomamos el punto $(1, 0, 0) = \Phi(0, 0) = \Phi(0, 1)$ sobre ella y la curva cerrada sobre la Banda por ese punto $\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0)$ con $0 \leq t \leq 1$ y calculamos el vector normal sobre los puntos de la curva vemos que

$$N(\alpha(t)) = \frac{1}{|\cos \pi t|} (-\cos 2\pi t \cos \pi t, -\sin 2\pi t \cos \pi t, 0) \quad (5.16)$$

y entonces vemos que $N(\alpha(0)) = (-1, 0, 0)$ mientras que $N(\alpha(1)) = (1, 0, 0)$. Esto nos muestra que no es posible definir sobre la Banda de Moebius un campo normal continuo.

Ejemplo 85 (La Botella de Klein) Esta superficie viene dada por los puntos de la forma

$$BK = \{R_{e_3, 2\pi v} \circ R_{e_1, \pi v}((a + \cos(2\pi u))e_1 + \sin(\pi u)e_3) \mid a > 1 \text{ y } u, v \in \mathbb{R}\}. \quad (5.17)$$

Es decir

$$BK = \left\{ \begin{aligned} &((a + \cos(2\pi u))\cos 2\pi v + \sin(\pi u) \sin(\pi v) \sin(2\pi v))e_1 + ((a + \cos(2\pi u))\sin(2\pi v) \\ &\quad - \sin(\pi u)\sin(\pi v)\cos(2\pi v))e_2 + \sin(\pi u)\cos(\pi v)e_3. \end{aligned} \right\}$$

Ejercicio 86 Considere la curva cerrada

$$\begin{aligned}\beta : [0, 1] &\rightarrow BK \\ \beta(t) &= ((a+1)\cos 2\pi t e_1 + ((a+1)\sin(2\pi t) e_2\end{aligned}\quad (5.18)$$

Calcule el vector normal a lo largo de la curva y muestre que no puede ser una función continua a lo largo de ella.

5.5. Distancia en una superficie y Primer forma fundamental.

Supongamos que $\alpha : [a, b] \rightarrow S_1$ es una curva diferenciable sobre S_1 y calculemos su longitud l_α .

Supongamos sin pérdida de generalidad, como después mostraremos, que $(U, \Phi(u, v))$ es una carta coordenada que contiene a los puntos de curva, es decir $\alpha(t) \in \Phi(U) \forall t$. Entonces podemos escribir $\alpha = \Phi \circ (\Phi^{-1} \circ \alpha)$ y definir $\beta : [a, b] \rightarrow U$ curva en el plano como $\beta = (\beta_1, \beta_2) = \Phi^{-1} \circ \alpha$.

Para calcular la longitud l_α procedamos como es costumbre, tomando una partición P del intervalo $[a, b]$ $a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = b$. Denotaremos por $\Delta = \max |t_i - t_{i-1}|$, a Δ se le llama la **norma de P** . Enseguida, vemos que la partición P determina una sucesión de puntos sobre la curva, cuyo i -ésimo término es de la forma $\alpha(t_i) = \Phi(\beta(t_i))$. Consideremos en \mathbb{R}^3 la curva poligonal ρ_P formada con esos puntos y calculemos su longitud misma que vendrá dada por la expresión

$$\text{longitud de } \rho_P = \sum_{i=1}^{i=n} \|\Phi(\beta(t_i)) - \Phi(\beta(t_{i-1}))\|. \quad (5.19)$$

Pero por el Teorema del valor medio, podemos encontrar para cada componente $\Phi_j, j = 1, 2, 3$ en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ y para cada componente $\Phi_j, j = 1, 2, 3$ un punto s_{ji} tal que

$$\begin{aligned}\Phi_j(\beta(t_i)) - \Phi_j(\beta(t_{i-1})) &= \frac{d}{dt}(\Phi_j \circ \beta)(s_{ji})(t_i - t_{i-1}) = \\ &= \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial u}(\beta(s_{ji})) \frac{d\beta_1}{dt}(s_{ji}) + \frac{\partial \Phi_j}{\partial v}(\beta(s_{ji})) \frac{d\beta_2}{dt}(s_{ji}) \right) (t_i - t_{i-1}).\end{aligned}$$

Veamos ahora que la longitud de la curva α es el límite de las longitudes de las curvas poligonales cuando la norma de la partición P tiende a 0, es decir

$$\begin{aligned}\text{longitud de } \alpha &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} (\text{longitud de } \rho_P) = \\ &= \int_a^b \|\Phi_u(\beta(t)) \frac{d\beta_1}{dt}(t) + \Phi_v(\beta(t)) \frac{d\beta_2}{dt}(t)\| dt\end{aligned}$$

Si definimos ahora las funciones

$$E = \Phi_u \cdot \Phi_u, \quad F = \Phi_u \cdot \Phi_v, \quad G = \Phi_v \cdot \Phi_v \quad (5.20)$$

podemos escribir

$$\text{longitud de } \alpha = \int_a^b \sqrt{E(\beta(t))(\dot{\beta}_1)^2(t) + 2F(\beta(t))\dot{\beta}_1(t)\dot{\beta}_2(t) + G(\beta(t))(\dot{\beta}_2)^2(t)} dt \quad (5.21)$$

Sea S una superficie regular e introduzcamos ahora un nuevo objeto que denominaremos **tensor métrico de S** o **Primer forma fundamental** de la siguiente manera. Sobre el plano tangente $\mathbb{T}_{\mathbf{p}}S$ consideremos la función bilineal $\mathbf{I}_{\mathbf{p}}$ definida como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\mathbf{p}} : \mathbb{T}_{\mathbf{p}}S \times \mathbb{T}_{\mathbf{p}}S &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{I}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Si (U, Φ) es una carta coordenada con $\mathbf{p} = \Phi(U_0, v_0)$, los vectores tangentes \mathbf{x}, \mathbf{y} se pueden escribir: $\mathbf{x} = a\Phi_u(u_0, v_0) + b\Phi_v(u_0, v_0)$, y $\mathbf{y} = c\Phi_u(u_0, v_0) + d\Phi_v(u_0, v_0)$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Así, tendremos

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= ac\Phi_u \cdot \Phi_u + (ad + bc)\Phi_u \cdot \Phi_v + bd\Phi_v \cdot \Phi_v = \\ &= acE(u_0, v_0) + (ad + bc)F(u_0, v_0) + bdG(u_0, v_0) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Note que en cada espacio tangente $\mathbb{T}_{\mathbf{p}}S$ a la superficie S , la función bilineal $\mathbf{I}_{\mathbf{p}}$ define un **producto interior**, es decir una transformación bilineal simétrica.

Ejercicio 87 Demuestre que la transformación

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ Q((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= ax_1x_2 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cy_1y_2 \end{aligned}$$

es bilineal y simétrica, es decir $Q((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = Q((x_2, y_2), (x_1, y_1))$

En términos de las coordenadas de \mathbf{x} y \mathbf{y} relativas a la carta (U, Φ) podemos escribir

$$\mathbf{I}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Ahora extendamos esta función bilineal a todo el espacio tangente a S

$$\mathbf{I} : \mathbb{T}S \times \mathbb{T}S \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.25)$$

$$\mathbf{I}((\mathbf{p}, \mathbf{x}), (\mathbf{p}, \mathbf{y})) = \begin{bmatrix} c(u, v) & d(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(u, v) \\ b(u, v) \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

donde $S \ni \mathbf{p} = \Phi(u, v)$. A \mathbf{I} se le llama **Tensor métrico** de la superficie regular S .

El Tensor métrico tiene asociada la forma cuadrática

$$B(X) = \mathbf{I}(X, X). \quad (5.27)$$

5.5. DISTANCIA EN UNA SUPERFICIE Y PRIMER FORMA FUNDAMENTAL.47

A esta forma cuadrática se le denomina **La Primer forma fundamental** de S y se acostumbra escribirse en la forma

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2 \quad (5.28)$$

En términos geométricos, la expresión anterior para ds^2 nos dice que el incremento en la distancia (du, dv) da lugar a un elemento de longitud sobre la superficie de tamaño ds^2 . En términos de la primera forma fundamental, la longitud de una curva sobre S dada por $\alpha = \Phi \circ \beta(t)$ con $\beta : [a, b] \rightarrow A$ se expresa como

$$\text{longitud de } \alpha = \int_a^b \sqrt{ds^2(\dot{\beta}(t), \dot{\beta}(t))} dt \quad (5.29)$$

Ejemplo 88 Sea S la superficie dada por el plano $P = \{(u, v, 0) \in \mathbb{R}^3\}$. La parametrización de P dada por

$$\Phi(u, v) = (u, v, 0)$$

nos define el tensor métrico ds^2 cuyos coeficientes son

$$E(u, v) = 1, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = 1$$

mediante la expresión

$$ds^2 = du^2 + dv^2 \quad (5.30)$$

Si ahora tomamos otra carta $((0, \infty) \times (0, 2\pi), \Psi)$ definida en el dominio resultante de remover el origen y eje positivo de las u s,

$$\Psi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \text{Sen}(\theta), 0) \quad (5.31)$$

entonces los coeficientes del tensor métrico toman la forma

$$E(r, \theta) = 1, \quad F(r, \theta) = 0, \quad G(r, \theta) = r^2 \quad (5.32)$$

y en esas nuevas coordenadas, el tensor métrico se escribe

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (5.33)$$

Ejemplo 89 Para la esfera S^2 con la parametrización dada por

$$\begin{aligned} \Phi : (0 \times 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \Phi(\theta, \phi) &= (\text{Cos}\phi \text{Sen}\theta, \text{Sen}\phi \text{Sen}\theta, \text{Cos}\theta), \end{aligned} \quad (5.34)$$

el tensor métrico toma la forma

$$ds^2 = (\text{Sen}^2\theta)d\theta^2 + d\phi^2 \quad (5.35)$$

Notese que el determinante de la matriz $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ satisface debido a la condición de regularidad de S

$$EG - F^2 = \|\Phi_u\|^2\|\Phi_v\|^2 - (\Phi_u \cdot \Phi_v)^2 = \|\Phi_u \times \Phi_v\|^2 > 0 \quad (5.36)$$

.De la relacion anterior se sigue que la primer forma fundamental satisface la relacion

$$ds^2(X, X) > 0, \quad \forall X \in \mathcal{X}(A) \quad (5.37)$$

Cuando un producto interior satisface la relacion 5.37, se denomina **positivo definido**.

Ejercicio 90 Pruebe que la transformación bilineal \mathbf{I}_p en 5.23 es positiva definida.

Teniendo definida en cada espacio tangente $\mathbb{T}_p S$ un producto interior, el angulo entre dos vectores tangentes X, Y en el punto $\mathbf{p} \in S$ se encuentra como

$$\text{angulo}(X, Y) = \frac{\mathbf{I}_p(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{I}_p(X, X)\mathbf{I}_p(Y, Y)}} \quad (5.38)$$

Ejercicio 91 Sea (U, Φ) carta coordenada de S . Calcule el angulo que hacen las curvas parametricas $t \rightarrow \Phi(u_0 + t, v_0)$ y $t \rightarrow \Phi(u_0, v_0 + t)$ en el punto $\mathbf{p} = \Phi(u_0, v_0)$.

Observación 92 Si $\alpha : [a, b] \rightarrow S_1$ es una curva diferenciable sobre S entonces el calculo de la longitud no debe depender de la carta que se este utilizando para representar esa curva. Veamos: Sean (U, Φ) y (V, Ψ) dos cartas coordenadas tales que los puntos de α estan en la interseccion de $\Phi(U) \cap \Psi(V)$. Sean β curva en U y γ curva en V tales que $\alpha = \Phi(\beta)$ y $\alpha = \Psi(\gamma)$, calculemos la longitud usando la carta (U, Φ) . Denotaremos a $\Psi^{-1}\Phi(u, v) = (r(u, v), q(u, v))$ y $\gamma = (r(\beta_1(t), \beta_2(t)), q(\beta_1(t), \beta_2(t))) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$

$$\int_a^b \|\Phi_u(\beta(t))\frac{d\beta_1}{dt}(t) + \Phi_v(\beta(t))\frac{d\beta_2}{dt}(t)\| dt = \int_a^b \|(\Psi\Psi^{-1}\Phi)_u(\beta(t))\frac{d\beta_1}{dt}(t) + (\Psi\Psi^{-1}\Phi)_v(\beta(t))\frac{d\beta_2}{dt}(t)\| dt \quad (5.39)$$

y tenemos

$$\begin{aligned} (\Psi\Psi^{-1}\Phi)_u\frac{d\beta_1}{dt}(t) + (\Psi\Psi^{-1}\Phi)_v\frac{d\beta_2}{dt}(t) &= (\Psi_r\frac{\partial r}{\partial u} + \Psi_q\frac{\partial q}{\partial u})\frac{d\beta_1}{dt}(t) + (\Psi_r\frac{\partial r}{\partial v} + \Psi_q\frac{\partial q}{\partial v})\frac{d\beta_2}{dt}(t) \\ &= \Psi_r\frac{d\gamma_1}{dt}(t) + \Psi_q\frac{d\gamma_2}{dt}(t) \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\int_a^b \|\Phi_u(\beta(t))\frac{d\beta_1}{dt}(t) + \Phi_v(\beta(t))\frac{d\beta_2}{dt}(t)\| dt = \int_a^b \|\Psi_r(\gamma(t))\frac{d\gamma_1}{dt}(t) + \Psi_q(\gamma(t))\frac{d\gamma_2}{dt}(t)\| dt \quad (5.40)$$

es decir la longitud es independiente de la parametrización de la superficie que se use para calcularla. Lo anterior implica que la primer forma fundamental es un objeto geométrico asociado con la superficie misma y no con sus posibles representaciones o cartas coordenadas.

Definición 93 *Dos superficies S_1 y S_2 se dicen **isométricas** si existe una función $K : S_1 \rightarrow S_2$ que sea un difeomorfismo entre las superficies y que preserve la distancia entre sus puntos, es decir si α es una curva en S_1 entonces*

$$\text{longitud de } \alpha = \text{longitud de } K \circ \alpha \quad (5.41)$$

a la transformación K se le llama una **isometría**. Análogamente, dos superficies S_1 y S_2 se llaman **localmente isométricas** si cada punto de la superficie S_1 posee una vecindad isométrica a un abierto de S_2 .

Observación 94 *Note que la relación de isometría solo se puede dar entre superficies difeomorfas. Por ejemplo: el plano y el cilindro no son isométricas pero si son localmente isométricas.*

Observación 95 *Note también que si K es una isometría local y $(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}))$ es un vector tangente en \mathbf{p} , entonces el vector $DK(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}))$ en el punto $K(\mathbf{p})$ es tal que*

$$\|DK(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}))\| = \|v(\mathbf{p})\| \quad (5.42)$$

Observación 96 *Pruebe que el cilindro y el plano son localmente isométricos.*

Proposición 97 *Si S_1 y S_2 son localmente isométricas, y (U, Φ) y (V, Ψ) son cartas coordenadas de S_1 y S_2 y K es una isometría de $\Phi(U)$ en $\Psi(V)$ entonces la primer forma fundamental ds_1^2 de S_1 es igual a la primer forma fundamental ds_2^2 de S_2 ,*

$$ds_1^2 = ds_2^2 \quad (5.43)$$

Ejercicio 98 *Demuestre que toda isometría K preserva el producto interior de vectores. Expresé primero el producto interior de dos vectores en términos de la norma de vectores.*

Ejercicio 99 *Demuestre que si $K : S_1 \rightarrow S_2$ es una isometría local, entonces existen cartas (U, Φ) de S_1 y (V, Ψ) de S_2 tales que $\mathbf{p} \in \Phi(U) \cap \Psi(V)$ entonces los coeficientes de la primer forma fundamental en \mathbf{p} de S_1 dada en términos de (U, Φ) y los de la primer forma fundamental en $K(\mathbf{p})$ de S_2 coinciden.*

5.6. Area en superficies.

Sea S una superficie y (U, Φ) una parametrización local. Sea $(u_0, v_0) \in U$ y consideremos el rectángulo infinitesimal

$$R = \{(u_0 + t\Delta u, v_0 + s\Delta v) \text{ con } 0 \leq t, s \leq 1\}$$

con vertice el punto (u_0, v_0) . Bajo la parametrización el rectángulo R es transformado en el paralelogramo en \mathbb{R}^3 con vertice $\Phi(u_0, v_0)$ y generado por los vectores $\Phi_u(u_0, v_0)$ y $\Phi_v(u_0, v_0)$. Este último paralelogramo infinitesimal $\Phi(R)$ tiene por área

$$\text{Area}\Phi(R) \approx \|\Phi_u \times \Phi_v\| \Delta u \Delta v \quad (5.44)$$

consideremos ahora un conjunto B de la superficie con $B \subset \Phi(U)$. Entonces tomando una partición de $\Phi^{-1}(B)$ y sumando sobre sus partes podemos escribir

$$\text{área de } B = \iint \|\Phi_u \times \Phi_v\| du dv = \quad (5.45)$$

$$= \iint_{\Phi^{-1}(B)} \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (5.46)$$

Ejercicio 100 Demuestre que el área de un conjunto $B \subset S$ es independiente de la parametrización.

Ejercicio 101 Calcule el área de las siguientes superficies:

- La esfera de radio r .
- El cono recto de altura h y radio r ,
- ¿Tiene área la Banda de Moebius?

Capítulo 6

Curvatura en superficies.

6.1. El Operador de forma.

En este capítulo examinaremos el concepto de curvatura para superficies en el espacio tridimensional, recurriendo a la variación del campo unitario normal definido localmente sobre una superficie S para definir el concepto de curvatura normal.

Definición 102 Sea S una superficie regular y $\mathbf{p} \in S$. y sea N un campo normal unitario a la superficie definido en una vecindad del punto \mathbf{p} . Sea además V un vector tangente a S en \mathbf{p} . Se define el **operador de forma** en el punto \mathbf{p} con respecto al vector tangente V al vector definido mediante la operación

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \mathbb{T}_{\mathbf{p}}S &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{S}(\mathbf{p}, V) &= -\nabla_V N \end{aligned} \tag{6.1}$$

Veremos que el operador de forma captura la idea de curvatura de la S alrededor del punto.

Proposición 103 El operador de forma tiene las siguientes propiedades:

- (i) $\mathbf{S}(\mathbf{p}, V)$ es un vector tangente a S en el punto \mathbf{p} y entonces \mathbf{S} es una función lineal de $\mathbb{T}_{\mathbf{p}}S$ en $\mathbb{T}_{\mathbf{p}}S$,
- (ii) Si (U, Φ) es una carta coordenada entonces $\mathbf{S}(\mathbf{p}, \Phi_u) = -N_u$, donde $N = (N_1, N_2, N_3)$ y $N_u = (\frac{\partial N_1}{\partial u}, \frac{\partial N_2}{\partial u}, \frac{\partial N_3}{\partial u})$. Análogamente si $\mathbf{S}(\mathbf{p}, \Phi_v) = -N_v$, donde $N = (N_1, N_2, N_3)$ y $N_v = (\frac{\partial N_1}{\partial v}, \frac{\partial N_2}{\partial v}, \frac{\partial N_3}{\partial v})$,
- (iii) El operador de forma es un operador simétrico, es decir $\mathbf{S}(\mathbf{p}, V) \cdot W = \mathbf{S}(\mathbf{p}, W) \cdot V$, $\forall V, W \in \mathbb{T}_{\mathbf{p}}S$,

Demostración. Para probar (i) basta notar que $N \cdot N = 1$ y de la relación 4.38 obtenemos $N \cdot \mathbf{S}(\mathbf{p}, V) = 0$, lo cual nos dice que $\mathbf{S}(\mathbf{p}, V)$ es un vector

tangente a S . La linealidad del operador de forma se sigue de las propiedades de linealidad de la derivada señaladas por 4.35. El inciso (ii) se sigue de la definición de derivada covariante 4.34

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}, \Phi_u) = -\left(\frac{\partial N_1}{\partial u}, \frac{\partial N_2}{\partial u}, \frac{\partial N_3}{\partial u}\right) = -N_u.$$

Para demostrar (iii), vemos en virtud de que $N \cdot \Phi_u = N \cdot \Phi_v = 0$, que

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{p}, \Phi_u) \cdot \Phi_v &= -N_u \cdot \Phi_v = N \cdot \Phi_{uv} = \\ &= N \cdot \Phi_{vu} = -N_v \cdot \Phi_u = \mathbf{S}(\mathbf{p}, \Phi_v) \cdot \Phi_u \end{aligned}$$

Aplicando lo anterior a los vectores tangentes $V = a\Phi_u + b\Phi_v$ y $W = c\Phi_u + d\Phi_v$, obtenemos

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}, V) \cdot W = \mathbf{S}(\mathbf{p}, W) \cdot V$$

■

Para tener una mejor idea del significado del operador de forma veamos que información da respecto a una curva $\alpha(t)$ sobre la superficie que pasa por el punto $\mathbf{p} = \alpha(0)$ con una velocidad igual a $V = \dot{\alpha}(0)$. Concretamente

Proposición 104 *Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva suave con $\alpha(0) = \mathbf{p}$, entonces $\mathbf{S}(\mathbf{p}, \dot{\alpha}(0)) = \ddot{\alpha}(0) \cdot N$.*

Demostración. De la relación $\dot{\alpha}(t) \cdot N(\alpha(t)) = 0$, derivando tenemos

$$\ddot{\alpha}(t) \cdot N(\alpha(t)) + \dot{\alpha}(t) \cdot \frac{dN(\alpha(t))}{dt} = 0,$$

pero $\frac{dN(\alpha(t))}{dt} = \nabla_{\dot{\alpha}(t)} N$, luego

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}, \dot{\alpha}(0)) = \ddot{\alpha}(0) \cdot N(\mathbf{p})$$

■

Observación 105 *De la proposición anterior tenemos que el valor del operador de forma a lo largo del vector tangente $\dot{\alpha}(t)$ es igual a la componente normal de la aceleración. Note que la componente normal de la aceleración en \mathbf{p} solo depende de la velocidad de la curva en el punto. Luego, la aceleración normal viene dada únicamente por la superficie y el vector tangente en el punto.*

Observación 106 *El operador de forma $\mathbf{S}(\mathbf{p}, V)$ está asociado a la diferencial del llamado **mapeo de Gauss** definido en una vecindad \mathcal{V} del punto $\mathbf{p} \in S$ y con valores en la 2-esfera unitaria S^2*

$$\mathbf{U} : S \rightarrow S^2$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{q}) = N(\mathbf{q})$$

donde N representa la normal a S en el punto \mathbf{q} . En términos de \mathbf{U} , tenemos que $D\mathbf{U}(\mathbf{p}, V) = \mathbf{S}(\mathbf{p}, V)$, $\forall (\mathbf{p}, V) \in \mathbb{T}_{\mathbf{p}}S$. En este caso, el operador de forma se expresa como

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}, V) = -D\mathbf{U}(\mathbf{p}, V) \tag{6.2}$$

Si (U, Φ) es una parametrización de S y $\mathbf{p} = \Phi(u_0, v_0)$, los valores del operador de forma en el punto \mathbf{p} , están determinados por sus valores en la base de vectores tangentes $\{\Phi_u, \Phi_v\}$. De ahora en adelante consideraremos las funciones

$$e(u, v) = -\mathbf{S}(\mathbf{p}, \Phi_u) \cdot \Phi_u = -N_u \cdot \Phi_u = N \cdot \Phi_{uu}; \quad (6.3)$$

$$f(u, v) = -\mathbf{S}(\mathbf{p}, \Phi_u) \cdot \Phi_v = -N_u \cdot \Phi_v = N \cdot \Phi_{uv} \quad (6.4)$$

$$g(u, v) = -\mathbf{S}(\mathbf{p}, \Phi_v) \cdot \Phi_v = -N_v \cdot \Phi_v = N \cdot \Phi_{vv} \quad (6.5)$$

Ejercicio 107 Para el cilindro, la esfera, el toro y la Banda de Moebius, dé una carta coordenada y calcule para ella la forma de las funciones e, f, g .

Enseguida mostraremos la forma que toma el operador de forma en terminos de las funciones E, F, G, e, f, g .

Teorema 108 (Ecuaciones de Weingarten) Sea (U, Φ) una carta coordenada de una superficie regular S . Entonces el operador de forma en el punto $\mathbf{p} = \Phi(u_0, v_0)$ esta dado en terminos de la base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ por

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{p}, \Phi_u) &= -\mathbf{N}_u = -\frac{fF - eG}{EG - F^2} \Phi_u - \frac{eF - fE}{EG - F^2} \Phi_v \\ \mathbf{S}(\mathbf{p}, \Phi_v) &= -\mathbf{N}_v = -\frac{gF - fG}{EG - F^2} \Phi_u - \frac{fF - gE}{EG - F^2} \Phi_v \end{aligned}$$

Ejercicio 109 Demuestre el Teorema anterior.

Ejercicio 110 A partir de las Ecuaciones de Weingarten, escriba la matriz del operador de forma con respecto a la base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$.

6.2. La Curvatura normal.

Introduciremos aqui el concepto de curvatura normal en un punto $\mathbf{p} \in S$ en una dirección dada por un vector unitario tangente V como una medida de cuanto se "curva" la superficie en el punto cuando uno se mueve sobre esa superficie en la direccion tangente definida por V .

Definición 111 Se define la curvatura normal de S en el punto \mathbf{p} en la dirección del vector tangente unitario V como el número

$$k_n(\mathbf{p}, V) = \mathbf{S}(\mathbf{p}, V) \cdot V$$

Observación 112 Note que de acuerdo a la definición anterior, $k_n(\mathbf{p}, V) = k_n(\mathbf{p}, -V)$. Es decir, la curvatura normal es un escalar asociado a la dirección definida por el vector tangente (\mathbf{p}, V) .

En terminos de las funciones e, f, g la curvatura normal en la dirección definida por el vector tangente $V = a\Phi_u + b\Phi_v$ se calcula mediante la formula

$$\begin{aligned} k_n(\mathbf{p}, \frac{V}{\|V\|}) &= \mathbf{S}(\mathbf{p}, \frac{a\Phi_u + b\Phi_v}{\|a\Phi_u + b\Phi_v\|}) \cdot \frac{a\Phi_u + b\Phi_v}{\|a\Phi_u + b\Phi_v\|} = \\ &= \frac{e(u_0, v_0)a^2 + 2f(u_0, v_0)ab + g(u_0, v_0)b^2}{E(u_0, v_0)a^2 + 2F(u_0, v_0)ab + G(u_0, v_0)b^2}. \end{aligned}$$

A la forma cuadrática

$$\mathbf{II} = edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \quad (6.6)$$

se le llama la **Segunda forma fundamental de la superficie** y entonces la curvatura normal se escribe en la forma

$$k_n(\mathbf{p}, V) = \frac{\mathbf{II}}{\mathbf{I}}(\mathbf{p}, V) \quad (6.7)$$

Definición 113 Una dirección dada por un vector unitario tangente (\mathbf{p}, V) se dice **asintótica** si $k_n(\mathbf{p}, V) = 0$. Una curva $\alpha(t)$ sobre una superficie S se dice **curva asintótica** si $k_n(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) = 0, \forall t$.

Definición 114 A las direcciones tangentes en un punto $\mathbf{p} \in S$ en las cuales la curvatura normal alcanza su valor máximo y su valor mínimo se les llama **direcciones principales** y al valor de la curvatura normal en ellas se les denomina **curvaturas principales**. Un punto \mathbf{p} se dice **punto umbilical** si sus curvaturas principales son iguales.

Observación 115 Note que siendo la curvatura normal una función continua respecto de la dirección y esta definida en la circunferencia unitaria en el plano tangente al punto. Siendo la circunferencia un conjunto compacto, tenemos que necesariamente alcanza su máximo y mínimo valor en dos correspondientes direcciones.

Denotemos por k_{\max} y k_{\min} los valores máximo y mínimo de la curvatura normal: Si $k_{\max} = k_{\min}$ entonces para cualquier dirección tendremos $k_n(\mathbf{p}, V) = k_{\max} = k_{\min} = \text{constante}$. En este caso, al punto se denomina **punto umbilical**. Por ejemplo, todos los puntos de la esfera son puntos umbilicales.

En el caso que $k_{\max} \neq k_{\min}$, tenemos dos direcciones principales distintas V_{\max} y V_{\min} tales que

$$k_{\max} = k_n(\mathbf{p}, V_{\max}) \quad (6.8)$$

$$k_{\min} = k_n(\mathbf{p}, V_{\min}). \quad (6.9)$$

Mas aún tenemos el siguiente teorema,

Teorema 116 Si $k_{\max} \neq k_{\min}$ en un punto $\mathbf{p} \in S$, entonces: (i) V_{\max} es ortogonal a V_{\min} ; (ii) V_{\max} y V_{\min} son vectores propios del operador de forma, y sus valores propios correspondientes son k_{\max} y k_{\min} , es decir

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}, V_{\max}) = k_{\max} V_{\max} \quad (6.10)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}, V_{\min}) = k_{\min} V_{\min} \quad (6.11)$$

Demostración. Sea W un vector ortogonal a $V_{\text{máx}}$ y consideremos la base $\{V_{\text{máx}}, W\}$ para el plano tangente en $\mathbf{p} \in S$. Cada vector V unitario y tangente a S en \mathbf{p} se expresa de la forma

$$V = (\text{Cos}\theta)V_{\text{máx}} + (\text{Sen}\theta)W \quad (6.12)$$

el valor de la curvatura normal como funcion de θ se escribe

$$k_n(\mathbf{p}, \theta) = \mathbf{S}(\mathbf{p}, V) \cdot V = k_{\text{máx}} \text{Cos}^2\theta + (\mathbf{S}(\mathbf{p}, V_{\text{máx}}) \cdot W) \text{Sen}2\theta + (\text{Sen}^2\theta) \mathbf{S}(\mathbf{p}, W) \cdot W. \quad (6.13)$$

Como hemos puesto a $V_{\text{máx}}$ como la direccion desde donde se mide θ , entonces la funcion $k_n(\mathbf{p}, \theta)$ debe tener un máximo en $\theta = 0$, es decir, su derivada debe de anularse en $\theta = 0$,

$$\frac{dk_n(\mathbf{p}, 0)}{d\theta} = -(\text{Sen}2\theta)k_{\text{máx}} - 2\text{Cos}2\theta(\mathbf{S}(\mathbf{p}, V_{\text{máx}}) \cdot W) + (\text{Sen}2\theta)\mathbf{S}(\mathbf{p}, W) \cdot W \Big|_{\theta=0} \quad (6.14)$$

$$= -2(\mathbf{S}(\mathbf{p}, V_{\text{máx}}) \cdot W) = 0 \quad (6.15)$$

El otro valor de θ para el cual se anula la derivada viene siendo $\theta = \pi$. Luego, $W = V_{\text{mín}}$ y las direcciones principales resultan ortogonales.

Para probar que las direcciones principales son vectores propios, basta escribir usando la ortogonalidad de las direcciones principales

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}, V_{\text{máx}}) = (\mathbf{S}(\mathbf{p}, V_{\text{máx}}) \cdot V_{\text{máx}})V_{\text{máx}} + (\mathbf{S}(\mathbf{p}, V_{\text{máx}}) \cdot V_{\text{mín}})V_{\text{mín}} = k_{\text{máx}}V_{\text{máx}} \quad (6.16)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}, V_{\text{mín}}) = (\mathbf{S}(\mathbf{p}, V_{\text{mín}}) \cdot V_{\text{máx}})V_{\text{máx}} + (\mathbf{S}(\mathbf{p}, V_{\text{mín}}) \cdot V_{\text{mín}})V_{\text{mín}} = k_{\text{mín}}V_{\text{mín}} \quad (6.17)$$

■

Corolario 117 (Euler 1760) Sean $k_{\text{máx}}$ y $k_{\text{mín}}$ las curvaturas principales d una superficie regular S en un punto $\mathbf{p} \in S$ y sean $V_{\text{máx}}$ y $V_{\text{mín}}$ las correspondientes direcciones principales. Si $V = (\text{Cos}\theta)V_{\text{máx}} + (\text{Sen}\theta)V_{\text{mín}}$, entonces la curvatura normal en la dirección V esta dada por

$$k_n(\mathbf{p}, V) = k_{\text{máx}} \text{Cos}^2\theta + k_{\text{mín}} (\text{Sen}^2\theta). \quad (6.18)$$

Para determinar las curvaturas propias $k_{\text{máx}}$ y $k_{\text{mín}}$ en $\mathbf{p} = \Phi(u_0, v_0)$ en términos de la base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$, utilizamos las Ecuaciones de Weingarten para escribir la matriz del operador de forma en terminos de la base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$

$$\mathbf{S} = - \begin{bmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2} & \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ \frac{gF - fG}{EG - F^2} & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

y su polinomio caracteristico es

$$\lambda^2 - \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \lambda + \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0$$

de donde obtenemos que sus raíces son

$$\begin{aligned} k_{\text{máx}} &= \frac{eG - 2fF + gE + \sqrt{(eG - 2fF + gE)^2 - eg + f^2}}{EG - F^2}, \\ k_{\text{mín}} &= \frac{eG - 2fF + gE - \sqrt{(eG - 2fF + gE)^2 - eg + f^2}}{EG - F^2} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Definición 118 Sea S una superficie regular. La **curvatura media** H y la **curvatura gaussiana** K de S son las funciones reales en S definidas por

$$H(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(k_{\text{máx}}(\mathbf{p}) + k_{\text{mín}}(\mathbf{p})) ; \quad K(\mathbf{p}) = k_{\text{máx}}(\mathbf{p})k_{\text{mín}}(\mathbf{p})$$

donde $k_{\text{máx}}(\mathbf{p})$ y $k_{\text{mín}}(\mathbf{p})$ son las curvaturas principales en el punto \mathbf{p} .

Como $k_{\text{máx}}$ y $k_{\text{mín}}$ son los valores del operador de forma \mathbf{S} , y H y K son precisamente el promedio y producto de tales raíces, entonces el polinomio característico del operador de forma es precisamente

$$\lambda^2 - 2H(\mathbf{p})\lambda + K(\mathbf{p}) = 0$$

o equivalentemente

$$H(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\text{trace}\mathbf{S}(\mathbf{p}); \quad K(\mathbf{p}) = \det \mathbf{S}(\mathbf{p})$$

En términos de las funciones E, F, G, e, f, g y a partir de las expresiones 6.20 para la curvatura media y la curvatura gaussiana se calculan mediante las formulas

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \quad (6.21)$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (6.22)$$

Observación 119 Note que aunque el operador de forma y la curvatura media dependen de dirección que se haya tomado para definir la normal, la curvatura gaussiana es independiente de esa elección.

Ejercicio 120 Encuentre una expresión para la curvatura gaussiana de la silla de mono $M: z = x^3 - 3xy^2$.

Tomando en cuenta que tanto la curvatura media como la curvatura gaussiana se obtienen directamente de los valores propios del operador de forma \mathbf{S} , y siendo estas las raíces del polinomio característico, entonces para su cálculo basta calcular la matriz de \mathbf{S} en cualquier base del espacio tangente. Aplicando la anterior observación tenemos la siguiente

Lema 121 Sean V, W dos vectores tangentes a S en el punto \mathbf{p} . Entonces se tienen las formulas

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}, V) \times W + V \times \mathbf{S}(\mathbf{p}, W) = 2H(\mathbf{p})(V \times W), \quad (6.23)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}, V) \times \mathbf{S}(\mathbf{p}, W) = K(\mathbf{p})(V \times W) \quad (6.24)$$

Demostración. Siendo V, W una base para $\mathbb{T}_{\mathbf{p}}S$ tenemos que

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}, V) = aV + bW \quad (6.25)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}, W) = cV + dW \quad (6.26)$$

con a, b, c, d números reales. Luego la matriz de \mathbf{S} en esa base es de la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

y el polinomio característico es $\lambda^2 - \lambda(a+d) + (ad-bc) = \lambda^2 - 2H(\mathbf{p})\lambda + K(\mathbf{p})$. Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{p}, V) \times W + V \times \mathbf{S}(\mathbf{p}, W) &= (aV + bW) \times W + \\ &+ V \times (cV + dW) = (a+d)V \times W = 2H(\mathbf{p})(V \times W). \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{p}, V) \times \mathbf{S}(\mathbf{p}, W) &= (aV + bW) \times (cV + dW) = \\ &= (ad - bc)V \times W = K(\mathbf{p})(V \times W) \end{aligned}$$

Despejando $H(\mathbf{p})$ y $K(\mathbf{p})$ de las expresiones anteriores se obtiene

$$H(\mathbf{p}) = \frac{\det \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{p}, V) \cdot V & \mathbf{S}(\mathbf{p}, V) \cdot W \\ W \cdot V & W \cdot W \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} V \cdot V & V \cdot W \\ \mathbf{S}(\mathbf{p}, W) \cdot V & \mathbf{S}(\mathbf{p}, W) \cdot W \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} V \cdot V & V \cdot W \\ W \cdot V & W \cdot W \end{bmatrix}} \quad (6.27)$$

y

$$K(\mathbf{p}) = \frac{\det \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{p}, V) \cdot V & \mathbf{S}(\mathbf{p}, V) \cdot W \\ \mathbf{S}(\mathbf{p}, V) \cdot W & \mathbf{S}(\mathbf{p}, W) \cdot W \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} V \cdot V & V \cdot W \\ W \cdot V & W \cdot W \end{bmatrix}} \quad (6.28)$$

■

Definición 122 Una superficie regular S se dice **superficie minimal** si su curvatura media es cero. Una superficie regular se dice **superficie plana** si su curvatura gaussiana es cero.

La curvatura gaussiana permite clasificar los puntos de la superficie en cuatro clases

Definición 123 Sea \mathbf{p} un punto de una superficie regular S . Diremos que

- \mathbf{p} es elipítico si $K(\mathbf{p}) > 0$ (equivalentemente $k_{\text{máx}}(\mathbf{p})$ y $k_{\text{mín}}(\mathbf{p})$ tienen el mismo signo);

- \mathbf{p} es hiperbólico si $K(\mathbf{p}) < 0$ (equivalentemente $k_{\text{máx}}(\mathbf{p})$ y $k_{\text{mín}}(\mathbf{p})$ tienen signos contrarios);
- \mathbf{p} es parabólico si $K(\mathbf{p}) = 0$, pero $\mathbf{S}(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$ (equivalentemente solo uno de $k_{\text{máx}}(\mathbf{p})$ y $k_{\text{mín}}(\mathbf{p})$ es cero);
- \mathbf{p} es planar si $K(\mathbf{p}) = 0$, y $\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ (equivalentemente $k_{\text{máx}}(\mathbf{p}) = k_{\text{mín}}(\mathbf{p}) = 0$).

Observación 124 *Notese que en los puntos elípticos la superficie queda localmente de un lado del plano tangente en esos puntos y que en los puntos hiperbólicos, la superficie tiene puntos cercanos tanto como se quiera al punto que quedan en lados distintos del plano tangente.*

Ejercicio 125 *Demuestre que todo punto umbilical es elíptico .*

Ejercicio 126 *Clasifique los puntos del hiperboloide*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ejercicio 127 *Encuentre los coeficientes del operador de forma, la curvatura gaussiana y la curvatura media de la **superficie de Enneper** dada parametricamente por la carta coordenada global (\mathbb{R}^2, Φ) con*

$$\Phi(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right)$$

En cuanto a las direcciones asintóticas que puedan existir para un punto $\mathbf{p} \in S$, aplicando la formula de Euler 6.18 obtenemos:

- 1.-Si \mathbf{p} es un punto elíptico, $K(\mathbf{p}) = k_{\text{máx}}k_{\text{mín}} > 0$, entonces no hay direcciones asintóticas;
- 2.-Si \mathbf{p} es un punto hiperbólico, $K(\mathbf{p}) = k_{\text{máx}}k_{\text{mín}} < 0$, en este caso existen dos direcciones asintóticas bisectadas por las direcciones principales. Las direcciones asintóticas corresponden a los ángulos θ tales que

$$\tan 2\theta = -\frac{k_{\text{máx}}}{k_{\text{mín}}} \quad (6.29)$$

- 3.-Si \mathbf{p} es un punto parabólico, $K(\mathbf{p}) = k_{\text{máx}}k_{\text{mín}} = 0$, entonces si $k_{\text{máx}} \neq k_{\text{mín}}$ entonces existe una única dirección asintótica que además coincide con la dirección principal de curvatura normal cero.
- 4.-Si \mathbf{p} es un punto plano, $0 = k_{\text{máx}} = k_{\text{mín}}$, entonces todas las direcciones son asintóticas.

6.3. Curvas sobre una superficie.

Sea S una superficie regular y consideremos una curva sobre S , $\gamma : (a, b) \rightarrow S$. Supongamos que γ es de rapidez unitaria $\|\dot{\gamma}\|(s) = 1$, $s \in (a, b)$. Al estar sobre la superficie, la curva γ esta sujeta a la restricci3n

$$\dot{\gamma}(s) \cdot N_S(\gamma(s)) = 0 \quad (6.30)$$

donde N_S denota el campo normal a la superficie. Si calculamos la aceleraci3n $\ddot{\gamma}$ vemos que la podemos descomponer en una componente normal y una componente tangencial.

$$\ddot{\gamma} = (\ddot{\gamma} \cdot N_S)N_S + (\ddot{\gamma} - (\ddot{\gamma} \cdot N_S)N_S). \quad (6.31)$$

De la condici3n 6.30 y tomando derivadas, vemos que la componente normal de la aceleraci3n

$$\ddot{\gamma} \cdot N_S = -\frac{dN_S(\gamma(s))}{ds} \cdot \dot{\gamma} = -(\nabla_{\dot{\gamma}} N) \cdot \dot{\gamma} = k_n(\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$$

Es decir, la componente transversal de la aceleraci3n no es otra cosa que la curvatura normal en la direcci3n de la tangente a la curva. Por otro lado tenemos

$$\ddot{\gamma} \cdot N_S = k_\gamma N_\gamma \cdot N_S$$

donde N_γ es la normal a la curva y k_γ es la curvatura de γ . Sustituyendo la ultima expresi3n en en su anterior, tenemos la siguiente expresi3n para la curvatura normal

$$k_n(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) = k_\gamma \cos \theta \quad (6.32)$$

donde θ es el angulo que forman la normal a la superficie N_S y la normal de la curva N_γ en el punto $\gamma(0)$.

La formula 6.32 muestra que la curvatura normal coincide con la curvatura de la curva γ cuando $\theta = 0$, es decir cuando la curva γ es la curva que se obtiene al intersectar en el punto $\mathbf{p} = \gamma(0)$ la superficie S y el plano que pasa por \mathbf{p} y esta generado por la normal N_S y el vector tangente $\dot{\gamma}(0)$. El hecho anterior se puede tomar como una manera de definir la curvatura normal a partir del concepto de curvatura de curvas.

$$\text{Figura : Intersecci3n Superficie con Plano normal} \quad (6.33)$$

6.3.1. Curvatura geod3sica

A la componente de la aceleraci3n $\ddot{\gamma}$ de la curva γ en la direcci3n tangencial se denota k_g y se llama **curvatura geod3sica**. Concretamente definimos

$$k_g = \ddot{\gamma} \cdot (N_S \times \dot{\gamma}) \quad (6.34)$$

La curvatura geodésica nos indica la razón en la cual la curva se "curva" en la dirección del plano tangente a la superficie. Consideremos ahora el marco ortonormal en el punto $\mathbf{p} \in S$, formado por $\{V, W, N_S\}$, donde $V = \frac{1}{\sqrt{E}}\Phi_u$ y $W = N_S \times \frac{1}{\sqrt{E}}\Phi_u$. Como se observa, el marco se forma con la normal a la superficie N_S , el vector tangente unitario a la curva u-paramétrica $\frac{1}{\sqrt{E}}\Phi_u$ y el vector $W = N_S \times \frac{1}{\sqrt{E}}\Phi_u$. Denotemos por θ el ángulo que hace la tangente $\dot{\gamma}$ de la curva y el vector tangente $\frac{1}{\sqrt{E}}\Phi_u$. Entonces podemos escribir

$$\dot{\gamma} = (\text{Cos}\theta)V + (\text{Sen}\theta)W$$

y calculando la aceleración

$$\ddot{\gamma} = -(\text{Sen}\theta)\dot{\theta}V + (\text{Cos}\theta)\dot{V} + (\text{Cos}\theta)\dot{\theta}W + (\text{Sen}\theta)\dot{W}$$

y sustituyendo en 6.34 obtenemos la fórmula

$$k_g = \dot{\theta} + W \cdot \dot{V} \quad (6.35)$$

Esta última fórmula tiene un significado geométrico evidente, y nos dice que la curvatura geodésica es igual a la derivada del ángulo que hace la tangente con la curva u-paramétrica más la componente de la variación de la tangente de la curva paramétrica a lo largo de W .

6.3.2. Curvas Asintóticas

Definición 128 Una curva $\gamma(t)$ sobre una superficie S se dice **curva asintótica** si $k_n(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \mathbf{0}$, $\forall t$.

Si $\gamma(t)$ es una curva sintótica, se tiene que

$$\mathbf{S}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0 \quad (6.36)$$

y escribiéndola en términos de las coordenadas de $\gamma = \Phi(\gamma_1, \gamma_2)$ tenemos en base a la expresión 6.7

$$e(\gamma(t))\dot{\gamma}_1^2 + 2f(\gamma(t))\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2 + g(\gamma(t))\dot{\gamma}_2^2 = 0 \quad (6.37)$$

despejando $\frac{\dot{\gamma}_2}{\dot{\gamma}_1} = \varsigma(t)$

$$\varsigma(t) = -f \pm \sqrt{f^2 - eg} \quad (6.38)$$

y tomando $\gamma_1(t) = t$ obtenemos para γ_2 la ecuación diferencial,

$$\dot{\gamma}_2(t) = -f(t, \gamma_2(t)) \pm \sqrt{f^2(t, \gamma_2(t)) - e(t, \gamma_2(t))g(t, \gamma_2(t))} \quad (6.39)$$

Ejercicio 129 Calcule las direcciones asintóticas para un punto sobre el cilindro.

Ejercicio 130 Cuales son las curvas asintóticas de un Toro.

6.3.3. Curvas principales.

Definición 131 Una curva $\gamma(t)$ sobre una superficie S se llama *curva principal* o *línea de curvatura* si en cada uno de sus puntos su vector tangente define una *dirección principal*.

Proposición 132 Una curva $\gamma(t)$ sobre una superficie S , es una *curva principal* si y solo si satisface

$$\mathbf{S}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \times \dot{\gamma}(t) = 0. \quad (6.40)$$

Demostración. Siendo las direcciones principales en un punto $\mathbf{p} \in S$ las definidas por los vectores propios del operador de forma \mathbf{S} , como lo hemos mostrado en el Teorema , entonces una dirección V es principal si y solo si el valor del operador de forma en esa dirección es un vector colineal a esa dirección, es decir si

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}, V) \times V = 0. \quad (6.41)$$

■

Si expresamos γ en términos de coordenadas $\gamma = \Phi(\gamma_1, \gamma_2)$, la condición 6.40 se escribe

$$\dot{\gamma}_1^2 (fE - eF) + \dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 (gE - eG) + \dot{\gamma}_2^2 (gF - fG) = 0 \quad (6.42)$$

Si ahora suponemos que $\gamma_1(t) = t$, entonces la componente $\gamma_2(t)$ debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{(eG - gE) \pm \sqrt{(gE - eG)^2 - 4(fE - eF)(gF - fG)}}{2(gF - fG)} \quad (6.43)$$

La condición 6.42 se puede escribir como

$$\det \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_2^2 & \dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 & \dot{\gamma}_1^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{bmatrix} = 0 \quad (6.44)$$

6.3.4. Curvas geodésicas

Definición 133 Una curva $\gamma(t)$ sobre una superficie S se llama *curva geodésica* si su aceleración no tiene componente tangencial.

Como se deduce de la definición, una curva $\gamma(t)$ en S es geodésica si y solo si su curvatura geodésica es cero. Note que toda curva geodésica es de rapidez unitaria pues $\ddot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = 0$.

$$\ddot{\gamma} = 0 \quad (6.45)$$

Si $\gamma(s)$ es una curva sobre S de rapidez unitaria y consideramos el marco formado por $T = \dot{\gamma}(s)$, N_S y $W = N_S \times T$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{T} &= k_g W + k_n N_S \\ \dot{N}_S &= -k_n T - \mu W \\ \dot{W} &= -k_g T + \mu N_S \end{aligned} \tag{6.46}$$

Ejercicio 134 Pruebe que $\{T, N_S, W\}$ definidos arriba satisfacen el sistema 6.46.

6.4. Ejercicios del Capitulo.

Ejercicio 135 Considere la superficie de revolucion dada por la parametrización

$$\begin{aligned} \Phi : [0, 2\pi] \times (a, b) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \Phi(u, v) &= (\phi(v)\cos(u), \phi(v)\sin(u), \psi(v)) \end{aligned} \tag{6.47}$$

Calcule las curvaturas principales, la curvatura media y la curvatura gaussiana.

Ejercicio 136 Encuentre una superficie de revolución de curvatura gaussiana positiva constante.

Ejercicio 137 Encuentre una superficie de revolución de curvatura gaussiana negativa y constante.

Ejercicio 138 Sea γ una curva de rapidez unitaria sobre una superficie S . Demuestre: a) La curva γ es principal y geodésica si y solo si esta sobre un plano ortogonal a la superficie a lo largo de la curva. b) La curva γ es principal y asintótica si y solo si esta sobre un plano que es tangente a la superficie a lo largo de la curva.

Ejercicio 139 Demuestre que una curva es asintótica si y solo si su plano osculador es tangente a la superficie.

Ejercicio 140 Demuestre que en una curva de revolución todos los meridianos son curvas geodésicas.

Ejercicio 141 Demuestre el Teorema de Dupin: En cada punto $\mathbf{p} \in S$, la media aritmética de las curvaturas normales en dos direcciones perpendiculares es igual a la curvatura media.

Capítulo 7

Geometría Intrínseca de superficies