

Geometría de Curvas y Superficies - 2001

Primer Parcial

1. (10 pts.) Demuestre que $\alpha(t)$ es una curva regular plana si y sólo si $\tau \equiv 0$.
2. (10 pts.) Supongamos que dos curvas parametrizadas regulares $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\bar{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (no necesariamente parametrizadas por longitud de arco) son tales que las líneas normales de $\alpha(t)$ y $\bar{\alpha}(t)$ coinciden para todo $t \in I$. Es decir, si $n(t)$ denota el vector normal a α en t , existe una función $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + r(t)n(t).$$

Demostrar que $|\alpha(t) - \bar{\alpha}(t)|$ es necesariamente constante.

3. (10 pts.) ¿Existe en el plano una curva simple cerrada de longitud 6 y tal que el área de la región que encierra es 3?
4. (20 pts.) Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$. ¿Para qué valores de c se puede asegurar que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$$

es una superficie regular?

5. (15 pts.) Dada la superficie de revolución $(f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$ con f y g diferenciables, $0 < u < 2\pi$, $v \in I$, demuestre que las curvas coordenadas se cortan ortogonalmente. Calcule E , F y G en términos de f y g .
6. (15 pts.) Probar que si $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal y $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular invariante bajo L (es decir $L(S) \subset S$), entonces la restricción $L|_S$ de L a S es diferenciable y

$$dL_p(w) = L(w), \quad \forall p \in S, \forall w \in T_p(S).$$

7. (20 pts.) Demuestre rigurosa/cuidadosa/detalladamente que la banda de Möbius no es una superficie orientable. Dos parametrizaciones de la misma están dadas por:

$$X(u, v) = \left(\left[2 - v \sin \frac{u}{2} \right] \sin u, \left[2 - v \sin \frac{u}{2} \right] \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right)$$

$$\tilde{X}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left(\left[2 - \tilde{v} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tilde{u}}{2} \right) \right] \cos \tilde{u}, - \left[2 - \tilde{v} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tilde{u}}{2} \right) \right] \sin \tilde{u}, \tilde{v} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tilde{u}}{2} \right) \right)$$

Ejercicios seleccionados de la Sección 3.2: (para discutir el miércoles)

1, 2, 3, 4, 5, 7, 13, 16, 18.