

Superficies minimales y de curvatura media constante en \mathbb{R}^3 .

15 de febrero de 2002

1 Introducción histórica.

Antes de empezar con la materia propia de este curso, nos gustaría hacer un breve perfil histórico sobre la teoría de superficies minimales en el espacio Euclídeo. La historia de las superficies minimales comienza con L. Lagrange, quien en su memoria *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et minima des formules intégrales indéfinies* [15] (1762) desarrolló un algoritmo para el cálculo de variaciones que dió lugar a lo que hoy conocemos como ecuación diferencial de Euler-Lagrange. En este trabajo trató entre otros el problema de encontrar una superficie con contorno prefijado y área mínima, y como consecuencia estableció la ecuación que satisfacen los grafos minimales $f(x, y)$:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0 \quad (1)$$

Esta ecuación casilineal elíptica de segundo orden no fue escrita explícitamente por Lagrange, quien se preocupó también por estudiar el mismo problema anterior para variaciones de volumen constante. Las soluciones para este nuevo problema son lo que conocemos como *superficies de curvatura media $H = constante$* ($H = 0$ en el caso minimal).

Los matemáticos de aquella época constataron la gran dificultad y diferentes posibilidades que planteaban aquellos problemas. Pensemos que no fue hasta 170 años después cuando Douglas y Radó dieron la primera respuesta satisfactoria a estas cuestiones, y aún hoy día permanecen abiertas diferentes líneas de investigación al respecto como comentaremos posteriormente.

Interesado más en cuestiones teóricas, Lagrange no se preocupó de encontrar soluciones concretas no triviales de la ecuación (1). Fue L. Euler [6] quien lo logró por el procedimiento de rotar la curva llamada *catenaria*, para así obtener una superficie minimal que llamó *alysseide*. Posteriormente J. Plateau bautizó a esta superficie con el nombre actual de catenoide. En 1776 J.B.M.C. Meusnier descubrió que la catenoide y el helicoide satisfacían la ecuación (1), dándole una interpretación geométrica a la misma. Se dió cuenta que (1) expresaba el hecho de que se anulase una cantidad geométrica asociada a la forma en que se curvaba la superficie en el espacio, cantidad que llamó a sugerencia de Sophie

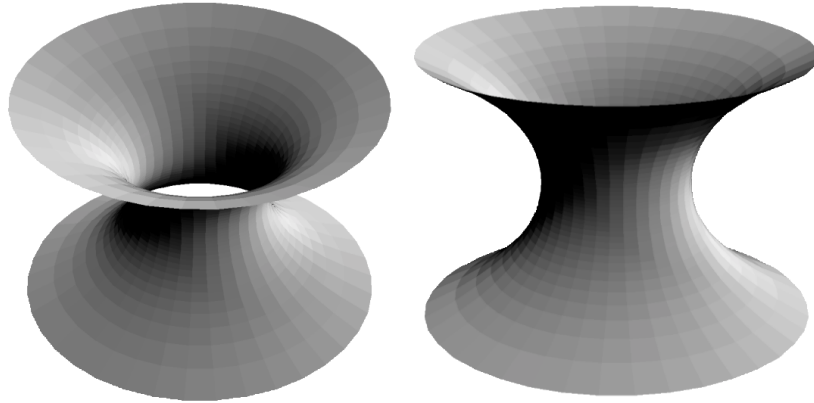


Figura 1: La catenoide, descubierta por L. Euler.

Germain *curvatura media* H . Es por eso por lo que históricamente se han llamado *superficies minimales* a aquellas que tienen *curvatura media cero*, sin tener en consideración que en la mayoría de los casos no representan un mínimo para el funcional área. Esta será también nuestra definición.

G. Monge en 1784 [18, 19], luego A. Legendre en 1787 [16], y posteriormente S. F. Lacroix y A. M. Ampère entre otros, integraron la ecuación de Lagrange y obtuvieron fórmulas para las funciones coordenadas de las superficies minimales en términos de funciones analíticas. En 1816, J. D. Gergonne [7] formuló una serie de problemas concretos y dirigió la atención de los matemáticos al estudio de las superficies minimales. De 1831 a 1835, casi sesenta años después del descubrimiento de la catenoide y del helicoides, H. F. Scherk mostró en [27, 28] ecuaciones explícitas para cinco nuevas superficies minimales obtenidas usando la representación de Monge-Legendre. Su idea fundamental fue usar una técnica de separación de variables para integrar la ecuación (1).

La edad de oro clásica de las superficies minimales fue aproximadamente la segunda mitad del siglo XIX, donde se sucedieron rápidamente nuevos descubrimientos y publicaciones. Entre 1842 y 1843 E. Catalan probó que el helicoides es la única superficie minimal reglada, aparte del plano. Por este tiempo, el físico belga J. Plateau observó que las superficies minimales se pueden realizar físicamente siguiendo la forma que adoptan las películas de jabón que se apoyan en un contorno de alambre fijo, motivando lo que hoy se conoce como *problema de Plateau*, es decir, la formulación matemática de la existencia o no de superficies minimales con frontera prefijada. Este planteamiento de Plateau ha sido uno de los focos con más influencia en el desarrollo de esta teoría, como iremos viendo más adelante. Posteriormente O. Bonnet investigó las líneas asintóticas, las de curvatura

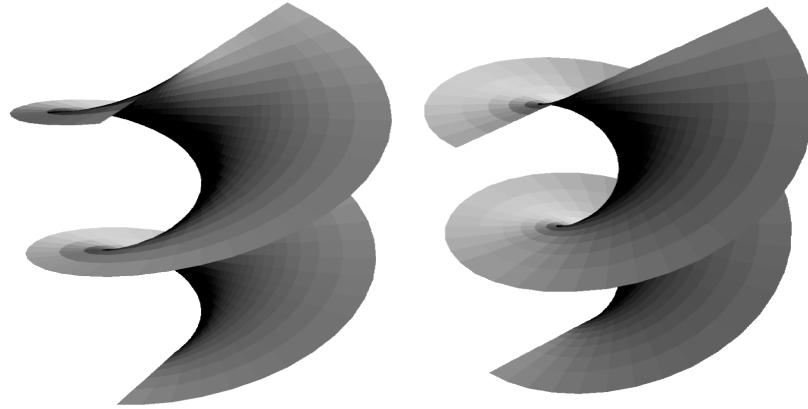


Figura 2: El helicoido.

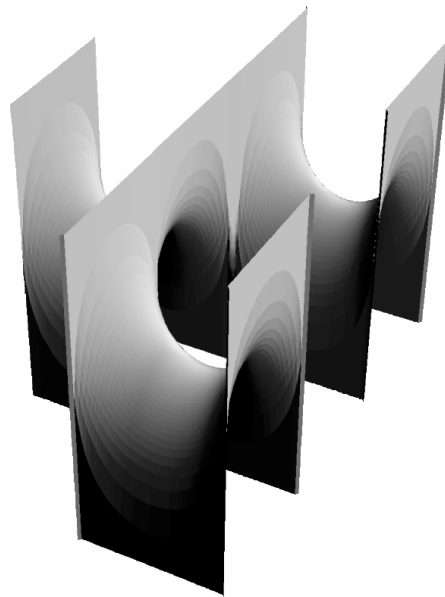


Figura 3: Una superficie de Scherk doblemente periódica.

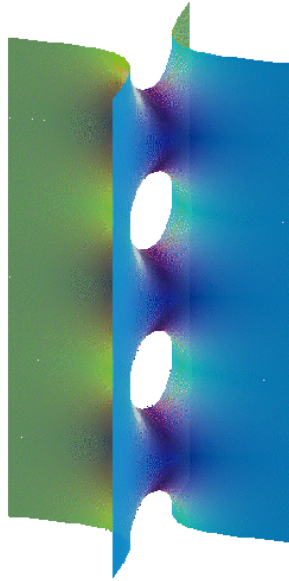


Figura 4: Una superficie de Scherk simplemente periódica.

y las geodésicas sobre superficies minimales.

En el año 1865 la teoría de superficies minimales sufrió un importante empuje gracias a la obtención por H. A. Schwarz [25] de métodos para resolver el problema de Plateau con borde un cuadrilátero prefijado, cuya aplicación más inmediata fue el descubrimiento de un ejemplo triplemente periódico que hoy lleva su nombre. Estos trabajos están basados en las fórmulas de representación para superficies minimales obtenidas por K. Weierstrass. Weierstrass había expuesto estas fórmulas en el Seminario matemático de la Universidad de Berlín en 1861 y las comunicó a la Academia de Berlín en 1866 (ver [32, 33]). Unas fórmulas de representación similares fueron establecidas por A. Enneper [5] en 1864 usando las líneas de curvatura como líneas de parámetros sobre la superficie. Como aplicación sencilla de dichas fórmulas, Enneper descubrió (ver de nuevo [5], pag. 108) un nuevo ejemplo de superficie minimal, que hoy conocemos como superficie de Enneper.

Otras fórmulas de representación fueron introducidas por J. Weingarten (1863), B. Riemann (1866), A. Peterson (1866) y E. Beltrami (1868).

Riemann contribuyó al desarrollo de esta teoría en varias facetas, y de especial forma con su trabajo póstumo publicado en 1867 [24]. En este trabajo Riemann trató el problema de Plateau para superficies minimales bordeadas por una o varias líneas rectas. En concreto, él estudió los siguientes casos especiales de frontera: (i) Dos líneas rectas que se cruzan. (ii) Tres líneas rectas, dos de las cuales están en un plano P y se intersecan, y la tercera está en un plano P' paralelo a P . (iii) Tres líneas rectas que se cortan. (iv) Un

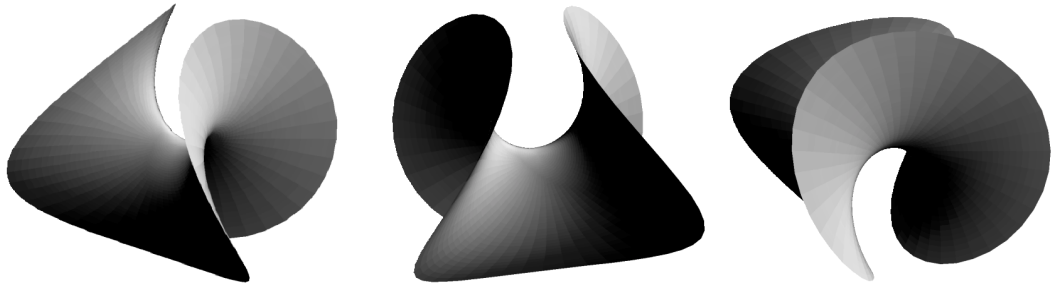


Figura 5: La superficie de Enneper.

cuadrilátero. (v) Dos círculos arbitrarios en planos paralelos.

Este último caso da lugar a una familia uno-paramétrica de superficies minimales foliadas por líneas y círculos en planos paralelos. Estas superficies junto con la catenoide fueron caracterizadas por el propio Riemann como las únicas fibradas por círculos en planos paralelos y son conocidas como los ejemplos de Riemann. Con el paso del tiempo se descubrió la importancia del Análisis Complejo y la teoría de Superficies de Riemann dentro del campo de las superficies minimales, por lo que los trabajos fundacionales en esta línea de B. Riemann han supuesto una aportación directa de extraordinario valor.

Otro hecho interesante fue el descubrimiento de la primera superficie minimal no orientable, debido a L. Henneberg en el año 1875 (ver [8, 9]). La superficie de Henneberg fue estudiada por A. Herzog y C. Schilling, el último de los cuales obtuvo un dibujo estereoscópico de la misma.

Otros grandes geómetras que en este tiempo contribuyeron al desarrollo de esta teoría fueron: J. A. Serret [26], A. Ribaucour, G. Darboux, L. Bianchi, S. Lie y A. Schoenflies, entre otros.

Veinte años después de que Riemann fundara la Geometría Riemanniana (10 de Junio de 1854) R. Lipschitz [17] propuso una generalización de la idea de Meusnier acerca del concepto de curvatura media definiendo el vector curvatura media asociado a una subvariedad. Lipschitz probó que una subvariedad es crítica para el funcional volumen si y sólo si su vector curvatura media es nulo y, en consecuencia, extendió la teoría de superficies minimales a ambientes de dimensión arbitraria.

Durante los primeros años del siglo XX no hubo progresos significativos en la teoría de las superficies minimales aparte de un trabajo de E. R. Neovius sobre superficies minimales periódicas que es una continuación de sus primeros trabajos llevados a cabo en la década de 1880 a 1890.

Una contribución esencial indirecta al estudio de las superficies minimales fue el nacimien-

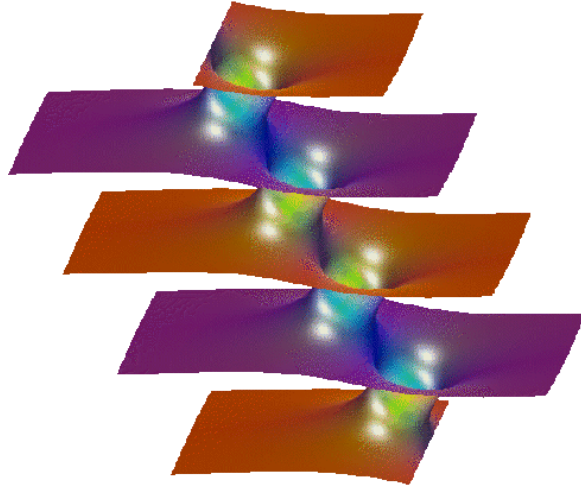


Figura 6: Un ejemplo de Riemann.

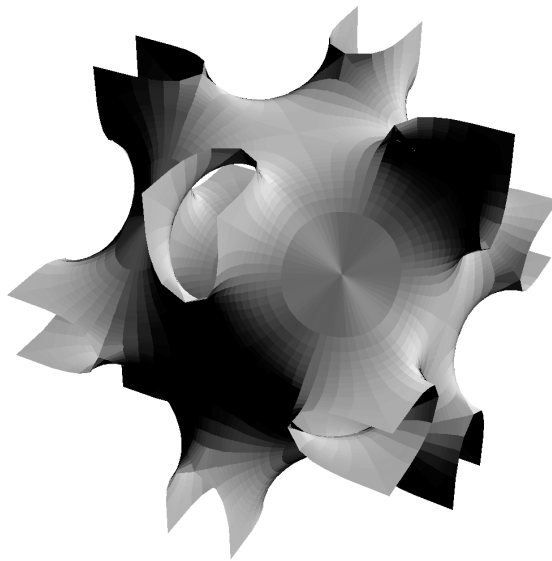


Figura 7: Una pieza fundamental de la superficie de Neovius.

to y posterior desarrollo de la poderosa teoría de integración y medida, debida a E. Lebesgue. De gran importancia fueron también los métodos directos de Hilbert, Lebesgue, Courant y Tonelli, y la teoría del Análisis Funcional fundada por Hilbert, F. Riesz, E. Schmidt, R. Fréchet, Hahn y Banach. Además las técnicas básicas de la teoría de ecuaciones elípticas, los teoremas de regularidad y las estimaciones a priori, allanaron el camino para una resolución satisfactoria del problema de Plateau. El resultado más brillante en las primeras décadas del nuevo siglo XX fue el Teorema de Bernstein [1], uno de los más fascinantes resultados en la teoría de ecuaciones elípticas no lineales. Este teorema afirma que el único grafo minimal definido en todo el plano es el determinado por una función afín. Tal resultado fue generalizado, bajo ciertas hipótesis adicionales, a dimensión y codimensión arbitraria por Hildebrandt, Jost y Widman.

Entre 1925 y 1950 la teoría de superficies minimales cobró nuevo empuje. Uno de los aspectos que sufrió un mayor desarrollo fue el problema de Plateau. La primera prueba de existencia general para el problema de Plateau no paramétrico fue dada por Haar en 1927 con importantes aportaciones de Radó acerca de la regularidad y minimalidad de la solución. La contribución de Haar y Radó supuso un gran avance; por primera vez el programa elaborado por Hilbert en sus problemas 19 y 20 fue llevado a cabo usando técnicas de cálculo de variaciones aplicadas a ecuaciones de Euler no lineales. Garnier publicó una primera solución al problema de Plateau con un contorno general en 1928, aunque un resultado más completo y convincente fue obtenido por Douglas [3, 4] y Radó en 1930.

En la década de los sesenta, De Giorgi, Fleming, Federer y Reifenberg desarrollaron la potente teoría geométrica de la medida que se ha convertido en una herramienta cada vez más influyente en el estudio de las superficies minimales y de curvatura media constante.

En los últimos 30 años, el interés se ha centrado sobre una clase de superficies que están, conceptualmente, bastante lejos del término original de superficie minimal: son aquellas superficies que careciendo de frontera, se extienden indefinidamente en el espacio; en otras palabras, *superficies minimales completas*. Esto se debe sobre todo a los trabajos de R. Osserman, quien recuperó la olvidada teoría de Enneper y Weierstrass mostrando su utilidad e importancia en el estudio de las superficies minimales completas. La principal aportación de Osserman consistió en conectar la teoría de superficies minimales completas con el Análisis Complejo y la teoría de Superficies de Riemann clásicos. Así pudo obtener resultados acerca de la aplicación de Gauss de superficies minimales (que puede interpretarse como una función meromorfa) y la geometría de las superficies minimales completas de curvatura total finita en \mathbb{R}^3 . Estos trabajos de Osserman (que pueden verse en [20, 22]), han sido el detonante de una extraordinaria expansión de la teoría de superficies minimales en la segunda mitad del siglo XX, que continúa en nuestros días.

A comienzos de los años 80, aprovechando las técnicas introducidas por Osserman, C. C. Chen y F. Gackstatter construyeron los dos primeros ejemplos orientables con topología no trivial. Estos ejemplos tienen género uno y dos, respectivamente, y un único final.

Ambas pueden verse como el resultado de unirle una o dos asas a la superficie de Enneper, tal como ilustra la figura 8.

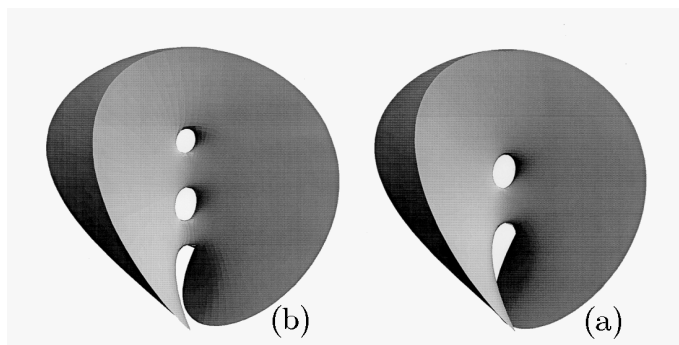


Figura 8: (a) La superficie de Chen y Gackstatter de género 1. (b) La superficie de Chen y Gackstatter de género 2.

El descubrimiento por parte de C. J. Costa de la superficie que desde entonces lleva su nombre, supuso el punto de partida para el estudio de la familia de las superficies minimales propiamente embebidas. La superficie de Costa es un toro propiamente embebido en \mathbb{R}^3 con tres finales, uno de ellos es asintótico a un plano y los otros dos son asintóticos a dos medias catenoides (véase la figura 9). Llegados a este punto es referencia obligada el trabajo de D. Hoffman y W. H. Meeks III [12], donde éstos construyen superficies minimales propiamente embebidas con tres finales y género arbitrario, a partir de la superficie de Costa. En la actualidad son muchos los nuevos ejemplos de superficies minimales completas, de curvatura total finita, tanto inmersas como embebidas en \mathbb{R}^3 . Para ello, hemos asistido a un prodigioso desarrollo de nuevas técnicas que complementan y superan las fórmulas de representación de Osserman-Enneper-Weierstrass. En esa nueva línea citamos los trabajos de N. Kapouleas [14], M. Traizet [29] y M. Weber y M. Wolf [30, 31].

Con esta breve incursión en la historia de las superficies minimales queremos poner de manifiesto que estamos ante un tema de investigación con una larga tradición, en el que han efectuado aportaciones significativas algunos de los más grandes matemáticos de las últimas tres centurias. A pesar de esto, las superficies minimales siguen siendo una fuente continua de nuevos desafíos y resultados que las mantienen en la primera línea dentro de la investigación actual en Geometría Diferencial.

2 Objetivos.

Desde luego, por razones de tiempo y espacio hemos de escoger algunas de las vertientes de la teoría de superficies minimales en \mathbb{R}^3 para desarrollar en el curso, aunque ello suponga

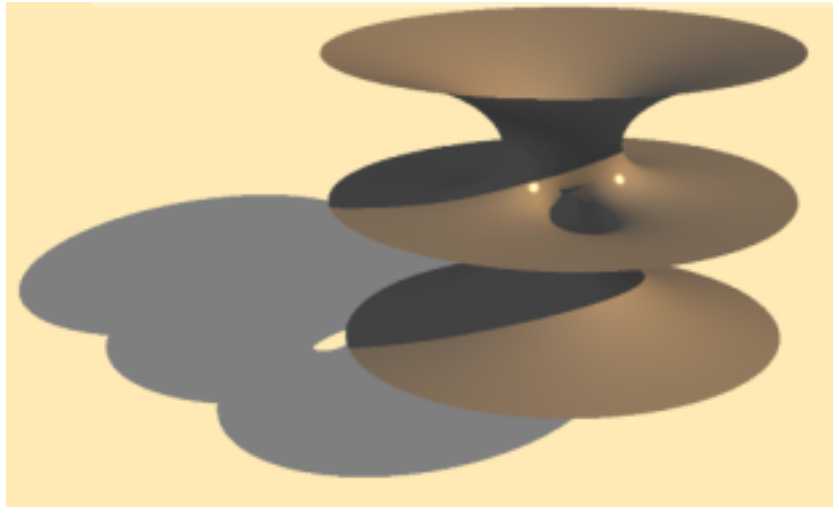


Figura 9: La superficie de Costa.

dejar de lado otras muchas no menos interesantes. Para esta elección nos hemos basado en primar resultados que estén basados (o se relacionen en cierta medida) en una de las herramientas más poderosas y útiles en esta teoría: el principio del máximo. Pero aún así hemos querido tocar, aunque sólo sea de paso, varios de los problemas principales en la teoría de superficies minimales.

Empezaremos con la Sección 3 de preliminares, donde presentaremos la mayoría de las definiciones y ejemplos con los que luego trabajaremos, así como los resultados de comparación elemental entre dos superficies atendiendo a sus segundas formas fundamentales. Tales resultados de comparación serán suficientes para probar en la Sección 4 la equivalencia entre la no positividad de la curvatura de Gauss de una superficie y satisfacer la *propiedad de la envolvente convexa* (Teorema 4.1). En particular, esta propiedad será satisfecha por cualquier superficie minimal compacta y con borde. En la Sección 5 daremos un giro hacia el Análisis para estudiar el principio del máximo para un operador lineal elíptico de 2º orden, y deduciremos de éste las formulaciones de los principios del máximo en el interior y en la frontera para el operador curvatura media de una superficie (Corolarios 5.2 y 5.3), la piedra angular sobre la que edificar las demostraciones de futuros teoremas. Como primera aplicación del principio del máximo probaremos en la Sección 6 el *Teorema fuerte del semiespacio* (Teorema 6.2), un reciente resultado enmarcado dentro de la teoría de las superficies minimales propiamente embebidas. La Sección 7 estará dedicada a otros de los problemas centrales en la teoría de las superficies minimales: el *Problema de Plateau*. Dentro de éste, evitaremos los principales resultados de existencia para concentrarnos en situaciones donde obtengamos unicidad de solución, como el Teorema

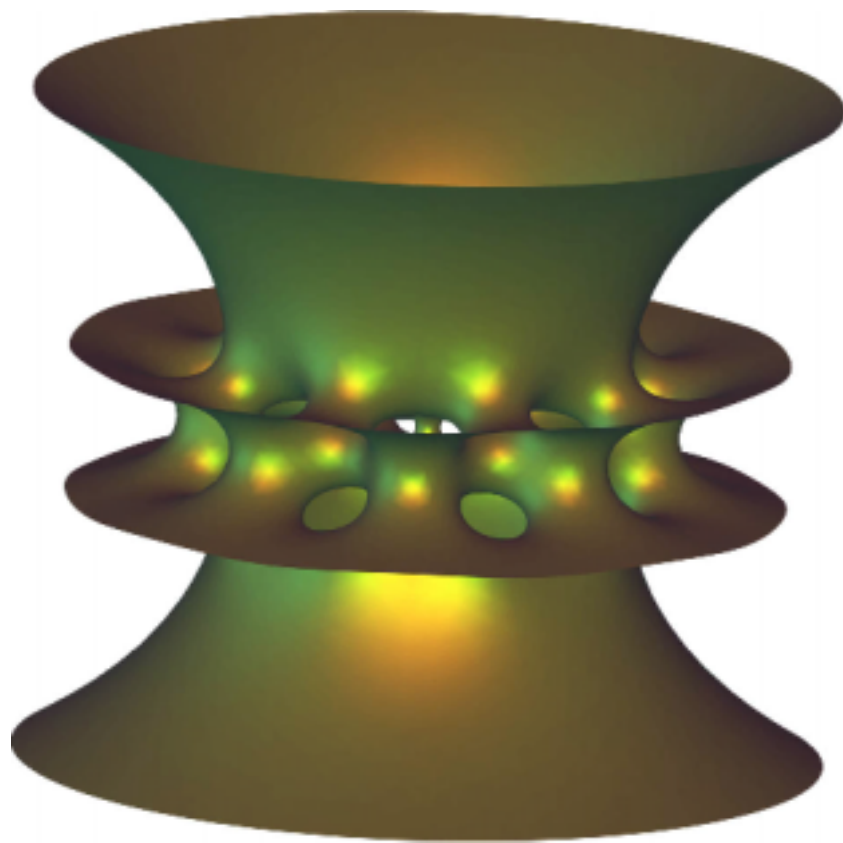


Figura 10: Uno de los ejemplos construidos por Kapouleas.

de Radó (Teorema 7.3). En la Sección 8 veremos algunos resultados relacionados con la desigualdad isoperimétrica en superficies minimales (Teoremas 8.1 y 8.2), donde de nuevo el principio del máximo será determinante para descartar situaciones en que una superficie minimal tiene dos componentes frontera demasiado alejadas en cierto sentido. Por último, hemos querido terminar con una incursión en el mundo de las superficies de curvatura media constante no cero, dedicando la Sección 9 a una de las más famosas aplicaciones del principio del máximo, el *método de reflexión de Alexandrov*, que culmina con su celebrada caracterización de la esfera (Teorema 9.1).

Como decíamos arriba, han quedado muchos temas sin tocar, entre ellos la representación de Weiersatras, algunos invariantes integrales de las superficies minimales como el flujo, la teoría de las superficies minimales periódicas o de las inmersas, el problema de períodos y la producción de ejemplos, y un largo etcétera. Creemos sin embargo, que los temas escogidos, además de tener un hilo conductor en el principio del máximo, dan una idea de la belleza de los resultados que pueden encontrarse dentro de esta teoría, y quizás susciten un interés que a buen seguro podrá saciarse en textos más especializados.