3 Preliminares.

Pasaremos ahora a establecer los conceptos básicos para desarrollar el curso.

3.1 Superficies embebidas.

Sea (M, g) una superficie Riemanniana. Una *inmersión isométrica* $\psi : (M, g) \to (\mathbb{R}^3, \langle , \cdot, \cdot \rangle)$ es una aplicación diferenciable tal que para cualquier $p \in M$, la diferencial $d\psi_p : T_pM \to \mathbb{R}^3$ cumple

$$g_p(u, v) = \langle d\psi_p(u), d\psi_p(v) \rangle, \quad \forall u, v \in T_pM.$$

Diremos que ψ es un *embebimiento* cuando $\psi : M \to \psi(M)$ sea un homeomorfismo. En el caso de un embebimiento, es usual identificar M con $\psi(M)$ (esto es, veremos M como subconjunto de $\mathbb{R}^3$) y T_pM con el subespacio vectorial $d\psi_p(T_pM) \subset \mathbb{R}^3$, $\forall p \in M$. Si ψ es sólo inmersión isométrica, la segunda identificación sigue siendo válida pero la primero sólo lo es localmente.

Nota 3.1 Toda inmersión $\psi : M \to \mathbb{R}^3$ puede verse una inmersión isométrica sin más que considerar en M la métrica pullback $g = \psi^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ dada por $[\psi^* \langle \cdot, \cdot \rangle]_p(v, w) = \langle d\psi_p(u), d\psi_p(v) \rangle$, $\forall u, v \in T_pM$.

Ejemplo 3.1 El plano.
$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}$, donde $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, $d \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.2 La esfera.
$\mathbb{S}^2_{p_0}(r) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p - p_0\| = r\}$, donde $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $r > 0$.

Ejemplo 3.3 Sea $h : O \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, donde O es un abierto de $\mathbb{R}^3$. Sea $a \in \mathbb{R}$ un valor regular de h (i.e. $(\nabla h)_p \neq 0$ para todo $p \in h^{-1}(\{a\})$. Entonces, $M = h^{-1}(\{a\})$ es una superficie embebida en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 3.4 La Catenoide.
La superficie $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - \cosh^2 z = 0\}$ obtenida al revolucionar la catenaria de ecuación $y = \cosh z$ alrededor del eje z es una superficie embebida en $\mathbb{R}^3$, llamada *Catenoide* (ver figura 1 en la introducción).

Ejemplo 3.5 Las superficies de Scherk simple y doblemente periódicas.
Otras superficies embebidas en $\mathbb{R}^3$ son $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sin z = \sin hx \sinh y\}$ y $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \cos xe^z - \cos y = 0\}$. S_1 es invariante por el grupo cíclico de traslaciones

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z},$$

mientras que S_2 es invariante por el grupo de traslaciones de rango 2, generado por

$$(x,y,z) \mapsto (x+2\pi, y, z), \qquad (x,y,z) \mapsto (x, y+2\pi, z).$$

Por esta periodicidad, S_1 recibe el nombre de *superficie de Scherk simplemente periódica* (ver figura 4 en la introducción) mientras que S_2 se conoce como la *superficie de Scherk doblemente periódica* (figura 3). Además, nótese que S_2 contiene una familia infinita de rectas verticales,

$$R_{n,m} = \{n\pi + \frac{\pi}{2}\} \times \{m\pi + \frac{\pi}{2}\} \times \mathbb{R}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}.$$

3.2 Aplicación de Gauss y curvaturas.

Dada una inmersión isométrica $\psi : M \to \mathbb{R}^3$, llamaremos *aplicación de Gauss de M* a una asignación diferenciable de un normal unitario a T_pM en $\mathbb{R}^3$ para cada $p \in M$, i.e. $N \in C^\infty(M, \mathbb{S}^2(1))$ tal que $\langle N(p) \rangle = T_p^\perp M$, $\forall p \in M$.

Nota 3.2 Siempre es posible construir una aplicación de Gauss local: dada una carta $(U, \phi = (u,v))$ sobre M, podemos definir $N^U : U \to \mathbb{S}^2(1)$ mediante

$$N^U = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\psi}{\partial v}}{\|\frac{\partial\psi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\psi}{\partial v}\|}.$$

Sin embargo, la existencia de una aplicación de Gauss global no siempre está garantizada.

Definición 3.1 En la situación anterior, M se dice *orientable* si existe una aplicación de Gauss global $N : M \to \mathbb{S}^2(1)$.

Nótese que toda superficie orientable admite exactamente dos aplicaciones de Gauss, siendo éstas opuestas.

Definición 3.2 Sea M una superficie, inmersa isométricamente en $\mathbb{R}^3$. Usando una aplicación de Gauss (local) N, podemos definir la *segunda forma fundamental*

$$\sigma_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} \mid \sigma_p(v,w) = -\langle v, dN_p(w) \rangle,$$

para cualquier $p \in M$. σ_p es una forma bilineal simétrica sobre T_pM (dN_p es un endomorfismo autoadjunto de (T_pM, g_p)), y por tanto es ortogonalmente diagonalizable. Los valores propios $k_1(p), k_2(p)$ de σ_p se llaman las *curvaturas principales de M en p respecto a N*, y las *direcciones principales en p* son las direcciones propias asociadas a las curvaturas. Siempre podremos tomar una bases ortonormal de T_pM de direcciones principales en p.

Nótese que las curvaturas priincipales son los opuestos de los valores propios de dN, y por tanto cambian de signo al cambiar N por $-N$, pero las direcciones principales siguen siendo las mismas.

Definición 3.3 Se definen la *curvatura de Gauss y curvatura media* de M en p como

$$K(p) = k_1(p)k_2(p), \qquad H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)).$$

De nuevo, H cambia de signo al cambiar N por $-N$, pero K permanece invariante. Tanto K como H son funciones diferenciables sobre M.

Definición 3.4 Una superficie se dice *minimal* si su curvatura media se anula idénticamente.

Ejemplo 3.6 Sea Π un plano en $\mathbb{R}^3$. Entonces, su aplicación de Gauss es constante, luego $K = H = 0$ en Π. De hecho, estas dos propiedades caracterizan al plano:

> *Sea M una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Entonces, $H = K = 0$ en M si y sólo si M es un abierto de un plano.*

Ejemplo 3.7 En el caso de la esfera $\mathbb{S}^2_{p_0}(r)$, la aplicación de Gauss puede tomarse como $N(p) = -\frac{1}{r}(p - p_0)$, luego $dN_p = -\frac{1}{2}\mathrm{Id}_{T_p\mathbb{S}^2_{p_0}(r)}$, y la segunda forma fundamental es $\sigma_p = \frac{1}{r}\langle\cdot,\cdot\rangle$. De aquí se tienen $H = \frac{1}{r}$ y $K = \frac{1}{r^2}$.

Ejemplo 3.8 Si M viene dada por $M = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid f(p) = a\}$ donde $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ y a es valor regular de f, entonces podemos tomar como aplicación de Gauss a

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} : M \to \mathbb{S}^2(1).$$

Usando esto, es un buen ejercicio calcular la curvatura de Gauss y la curvatura media de la Catenoide y las superficies de Scherk simple y doblemente periódicas, y comprobar que $H = 0$ en ellas, i.e. son superficies minimales.

Ejemplo 3.9 El Helicoide.
El Helicoide es la superficie de $\mathbb{R}^3$ obtenida como imagen del embebimiento (ver figura 2 en la introducción)

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \mid \psi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v).$$

También tiene curvatura media idénticamente nula. De hecho, ésta es junto al plano la única superficie minima reglada y completa.

Ejemplo 3.10 La superficie de Enneper.
La superficie de Enneper es también una inmersión minimal del plano en R^3, dada por

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \mid \psi(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right).$$

Sin embargo, en este caso ψ no es un embebimiento (en la figura 5 de la introducción pueden verse representaciones de trozos de la superficie de Enneper sin autointersecciones, pero esta propiedad se pierde si representáramos partes mayores de la superficie).

3.3 Comparación de superficies mediante sus curvaturas.

Sea M una superficie inmersa isométricamente en $\mathbb{R}^3$. Dado $p \in M$, es posible expresar localmente M como grafo de una función u definida en un entorno de 0 en T_pM. En esta situación la segunda forma fundamental de M en p es igual al *hessiano* de u en 0:

$$\sigma_p = (\nabla^2 u)_0 = \begin{pmatrix} u_{xx}(0) & u_{xy}(0) \\ u_{xy}(0) & u_{yy}(0) \end{pmatrix}.$$

Si ahora tenemos dos superficies M_1 y M_2 que son tangentes en un punto común $p \in M_1 \cap M_2$, podremos expresar ambas superficies localmente como grafos sobre el mismo abierto de $T_pM_1 = T_pM_2$ alrededor del origen. Sean u_1, u_2 las funciones tales que $M_1 =$ grafo(u_1) y $M_2 =$ grafo(u_2) (localmente). Consideraremos sobre M_1 y M_2 la misma orientación, i.e. $N_1(p) = N_2(p)$. Llamemos $u = u_2 - u_1$. Entonces, se tienen

$$u(0) = 0, \qquad (\nabla u)_0 = 0, \qquad (\nabla^2 u)_0 = (\sigma_2)_p - (\sigma_1)_p,$$

donde σ_1, σ_2 son las segundas formas fundamentales de M_1 y M_2 respecto a N_1 y N_2, respectivamente.

Definición 3.5 En la situación anterior, diremos que $M_1 \leq M_2$ en p (M_1 *está por debajo de* M_1 *en* p) si $u \geq 0$, i.e. $u_1 \leq u_2$ en un entorno de 0. Nótese que se exige $N_1(p) = N_2(p)$ para comparar ambas superficies.

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del comportamiento local del hessiano en un mínimo de una función diferenciable.

Lema 3.1 *En la situación anterior,*

1. *Si* $(\sigma_2)_p > (\sigma_1)_p$, *entonces* $M_2 \geq M_1$ *en* p.
2. *Si* $M_2 \geq M_1$ *en* p, *entonces* $(\sigma_2)_p \geq (\sigma_1)_p$. *En particular,* $H_2(p) \geq H_1(p)$.

Lema 3.2 *Sea M una superficie en $\mathbb{R}^3$ y $p \in M$. Entonces, $K(p) > 0$ si y sólo si existe una esfera $\mathbb{S}^2_{p_0}(r)$ tangente a M en p tal que $M \cap \overline{B}_{p_0}(r)$ es un entorno de p en M.*

Demostración. Supongamos primero que $K(p) > 0$. Tras posiblemente cambiar la aplicación de Gauss N por su opuesta, podemos suponer que las curvaturas principales en p respecto a N cumplen $k_1(p), k_2(p) > 0$. Dado $r > 0$, llamemos $p_r = p + rN_p$ y consideremos la esfera $\mathbb{S}^2_{p_r}(r)$. Es claro que $\mathbb{S}^2_{p_r}(r)$ y M son tangentes en p, y que N_p coincide con el normal interior a $\mathbb{S}^2_{p_r}(r)$ en p. Si ahora tomamos $r > 0$ tal que $\frac{1}{r} < k_i(p)$ para $i = 1, 2$, entonces la segunda forma fundamental σ_p respecto de N verificará $\sigma_p > \frac{1}{r}\langle, \cdot\rangle$. Pero el miembro de la derecha de esta desigualdad es la segunda forma fundamental de $\mathbb{S}^2_{p_r}(r)$ respecto del normal interior a $\mathbb{S}^2_{p_r}(r)$, luego podemos usar el apartado 1 del Lema 3.1 para concluir que $M \geq \mathbb{S}^2_{p_r}(r)$ en p. De aquí se deduce directamente que $M \cap \overline{B}_{p_r}(r)$ es un entorno de p en M.

Recíprocamente, supongamos que existe una esfera $\mathbb{S}^2_{p_0}(r)$ tal que $M \cap \overline{B}_{p_0}(r)$ es un entorno de p en M. Esto implica que $M \geq \mathbb{S}^2_{p_0}(r)$, luego por el apartado 2 del Lema 3.1 tenemos $\sigma_p \geq \frac{1}{2}\langle\cdot, \cdot\rangle$. Como esta última es una forma definida positiva, también lo es σ_p luego $K(p) > 0$. □