MATE2410 Geometría Diferencial 1
Examen Final — (25/11/2004) [1]

Prof. José Ricardo ARTEAGA

Prob.	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	Total
Valor	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	50
Puntos											

Nombre: Código:

Primera parte

Conteste Falso (F) o Verdadero (V) según el caso. Justifique matemáticamente.

1. Con una cuerda de longitud igual a 1 metro se puede encerrar (curva de Jordan en el plano), una región de área igual a $\frac{1}{2}$ metro cuadrado.
2. Se puede encontrar una superficie regular compacta orientable encajada (embedded) en $\mathbb{R}^3$ con curvatura media constante negativa igual a $-\frac{1}{3}$
3. La holonomía sobre cualquier curva cerrada sobre la esfera S^2 es igual a cero.
4. Si una superficie tiene métrica g_{ij} (primera forma fundamental I)

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^u \end{pmatrix}$$

entonces tiene curvatura de Gauss constante igual a cero.
5. La curvatura total del toro $\int_M K$ es igual a cero.

[1] El juramento del uniandino dice: "Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad"

Segunda parte

`Muestre todos sus cálculo explícitamente. Si lo desea puede comprobarlos con su intuición o con resultados tratados en el curso.`

Para todos los puntos de esta parte considere la superficie $M = S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y la curva en el primer octante α, que es la intersección de M con el plano $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ entre los puntos $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, es decir en forma paramétrica

$$\begin{cases} M: \quad X(u,v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \\ \alpha: \quad \alpha(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4} \\ P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

1. Calcule la triada (base ortonormal para $\mathbb{R}^3$) de los vectores tangente, normal y binormal $\{T, N, B\}$, la curvatura κ y la torsión τ para la curva α.
2. Calcule el operador forma S de la superficie M, la curvatura media H y la curvatura de Gauss K para cualquier punto sobre la curva α.
3. Calcule la curvatura normal de la superficie en el punto P en dirección del vector tangente en P, $k(T)$. T es el vector tangente unitario del punto anterior.
4. Encuentre el sistema de ecuaciones diferenciales que define la geodésica γ que une P con Q en el primer octante. No es necesario encontrar su solución.
5. Calcule la holonomía al mover el vector T desde P hasta Q sobre α. AYUDA: *Compruebe que* $\omega_{21} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *donde* $\nabla_{\alpha'}\xi_1 = \omega_{21}\xi_2$ *y* $\{\xi_1, \xi_2\}$ *base ortonormal del plano tangente* $T_p(M)$ *para cada* P *sobre* α.

Tiempo: 2 horas
`Buena Suerte!`