UNIVERSIDAD DE LOS ANDES — DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MATE2410 Geometría Diferencial 1
Solución del Examen Final — (02/12/2005) [1]

Prof. José Ricardo ARTEAGA

Prob.	1	2	3	4	5	Total
Valor	10	10	10	10	10	50
Puntos						

Nombre: Código:

---

1. Llene el espacio en blanco o conteste Falso (F) o Verdadero (V) según el caso. Justificación corta, en la hoja de examen.

   a) Las únicas superficies mínimas de revolución son:
   R/ El Catenoide y el plano.

   b) Las únicas superficies mínimas regladas son:
   R/ El Helicoide y el plano.

   c) Existen superficies mínimas con curvatura de Gauss constante $K > 0$. R/ Falso

   d) Existen superficies compactas con curvatura de Gauss constante $K < 0$. R/ Falso

   e) La superficie $X(u, v) = (u,\ u^2 \cos v,\ u^2 \sin v)$ tiene K constante. R/ Falso

---

SOLUCIÓN. Justificaciones:

a) Por el Teorema 3.5.7

b) Por el Teorema 4.2.6 (Teorema de Catalan)

c) Como las curvaturas principales, ambas no son cero, entonces dado que $H = 0$ (superficie mínima), tenemos que $k_2 = -k_1$, por lo tanto $K = -k_1^2$

d) Por el Teorema 3.5.5 (Teorema de Liebmann), debe ser una esfera con radio positivo, por lo tanto su curvatura de Gauss debe ser constante positiva.

e)
$$X_u = (1, 2u\cos v, 2u\sin v); \quad X_v = (0, -u^2 \sin v, u^2 \cos v)$$
$$E = 1 + 4u^2; \quad F = 0; \quad G = u^4; \quad \sqrt{EG} = u^2\sqrt{1 + 4u^2}$$
$$\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u = \left(\frac{4u}{\sqrt{1+4u^2}}\right)_u = \frac{4}{(1+4u^2)^{3/2}} \Rightarrow \boxed{K = -\frac{2}{u^2(1+4u^2)^2}}$$

---

[1] El juramento del uniandino dice: "Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad"

2. Considere la curva $\beta(t) = (1+3\cos t, 2+5\sin t, 3+4\cos t)$ para $t \in \mathbb{R}$. Calcule las siguientes funciones de t: Velocidad, rapidez, aceleración, tangente, normal, binormal, curvatura y torsión.

SOLUCIÓN.

a) $\mathbf{v} = \beta'(t) = (-3\sin t, 5\cos t, -4\sin t)$

b) $\nu = |\mathbf{v}| = |\beta'(t)| = \sqrt{9\sin^2 t + 25\cos^2 t + 16\sin^2 t} = 5$

c) $t = s/5 \Rightarrow T(s) = \beta'(s) = \left(-\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}, \cos\frac{s}{5}, -\frac{4}{5}\sin\frac{s}{5}\right)$

d) $\kappa = |T'(s)| = \sqrt{\frac{9}{25^2}\cos^2\frac{s}{5} + \frac{1}{25}\sin^2\frac{s}{5} + \frac{16}{25^2}\cos^2\frac{s}{5}} = \sqrt{\frac{1}{25}} \Rightarrow \kappa = 1/5$

e) $N(s) = \frac{1}{\kappa}T'(s) = 5\left(-\frac{3}{25}\cos\frac{s}{5}, -\frac{1}{5}\sin s5, -\frac{4}{5}\cos\frac{s}{5}\right)$

f) $B = T \times N = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$

g) $\tau = -N \cdot B'$; $B' = \mathbf{0} \Rightarrow \tau = 0$

La curva es una *circunferencia* de radio 5

---

3. Suponga que $\alpha : [0,\ell] \to \mathbb{R}^3$, es una curva suave parametrizada por la longitud de arco, y que $\alpha(0) = \alpha\left(\frac{\ell}{3}\right) = \alpha(\ell)$. ¿Cuál es el área total máxima posible de todas las regiones acotadas por α?

SOLUCIÓN. Dado que $\alpha(0) = \alpha(\ell/3) = \alpha(\ell)$, la curva tiene una auto-intersección. Usaremos la desigualdad isoperimétrica para cada una de las partes determinadas por la curva.

$$A_1 \le \frac{\ell_1^2}{4\pi}; \quad A_2 \le \frac{\ell_2^2}{4\pi} \quad \therefore \quad A \le \frac{\ell_1^2}{4\pi} + \frac{\ell_2^2}{4\pi} = \frac{(\ell/3)^2}{4\pi} + \frac{(2\ell/3)^2}{4\pi} = \boxed{\frac{5\ell^2}{36\pi}}$$

---

4. Considere el plano hiperbólico M según el modelo de Poincaré $\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ con métrica $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$. Sean $X = y\frac{\partial}{\partial y}$ un campo vectorial en el plano tangente T_pM, y la curva sobre M: $\gamma(t) = (t,t)$ para $1 \le t \le 2$. Calcule la holonomía de X a lo largo de γ desde $P = \gamma(1)$ hasta $Q = \gamma(2)$.

SOLUCIÓN. Usaremos $x = u$ y $y = v$ para la parametrización.

$$E = G = \frac{1}{v^2} \quad F = 0 \quad \omega_{21} = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\frac{du}{ds}$$

Para la parametrización de la curva γ en términos de la longitud de arco s, debemos encontrar primero la rapidez, para hallar la relación entre t y s:

$$|\gamma'(t)|^2 = \gamma'(t) \circ \gamma'(t) = \frac{2}{t^2} \Rightarrow s = \int_1^t |\gamma'(\tau)| d\tau = \sqrt{t}\ln t \Rightarrow \boxed{t = e^{s/\sqrt{2}}}$$

$$\gamma(s) = \left(e^{s/\sqrt{2}}, e^{s/\sqrt{2}}\right) \quad \gamma(0) = (1,1) \quad \gamma(\sqrt{2}\ln 2) = (2,2)$$

Ahora para la curva γ tenemos:

$$u = v = e^{s/\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_{21} = \frac{1}{v}\frac{du}{ds} \Rightarrow \boxed{\omega_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \therefore \quad \texttt{hol} = -\int_0^{\sqrt{2}\ln 2} \frac{1}{\sqrt{2}} ds = \boxed{-\ln 2}$$

---

5. Considere la superficie M parametrizada por

$$\mathbf{X}(u,v) = ((3+\sin v)\sin u, (3+\sin v)\cos u, \cos v)$$

puede considerar $-\pi/2 \le u, v, \le \pi/2$.

a) Halle una fórmula para el normal unitario hacia afuera $U(u,v)$ de M en $\mathbf{X}(u,v)$

b) Halle una fórmula para la curvatura de Gauss $K(u,v)$ de M en $\mathbf{X}(u,v)$

c) Cuáles son todos los valores posibles de la curvatura normal de M en $(4,0,0)$ y en $(2,0,0)$. La respuesta debe expresarla en términos de un intervalo.
Ayuda: *La superfice es un toro. Identifique los ángulos u y v para P y Q, haga un gráfico de la situación. No es necesario hacer cálculos.*

d) Calcule la característica de Euler de M, $\chi(M)$.

e) Calcule la curvatura total de Gauss. Compruebe el Teorema de Gauss-Bonnet para M.

Solución.

a) $X_u = ((3+\sin v)\cos u, -(3+\sin v)\sin u, 0)$ $\quad X_v = (\cos v \sin u, \cos v \cos u, -\sin v)$
$E = (3+\sin v)$ $\quad F = 0$ $\quad G = 1$ $\quad |X_u \times X_v| = (3+\sin v)^2$
$\boxed{U = (\sin u \sin v, \cos u \sin v, \cos v)}$

b) $E_v = 2(3+\sin v)\cos v$ $\quad G_u = 0$ $\quad \Rightarrow \frac{E_v}{\sqrt{EG}} = \frac{2(3+\sin v)\cos v}{3+\sin v} = 2\cos v$

$$\boxed{K = \frac{\sin v}{3+\cos v}}$$

c) En $P = (4,0,0)$ tenemos que $u = \pi/2; v = \pi/2$ y en $Q(2,0,0)$ $u = \pi/2; v = -\pi/2$
Sea Π_1 el plano xz, Π_2 el plano xy. La intersección de la superficie M con los planos coordenados Π_1 y Π_2 vistos únicamente para el caso de P y Q son circunferencias de radios $4, 2$ y 1, por lo tanto la curvatura normal en P está entre $1/4$ y 1 y la curvatura normal en Q está entre $-1/2$ y 1. Los signos se deben a la orientación de las normales en estos puntos para la superficie y para la circunferencia.

d) $\chi(M) = V - E + F = 0$, por que si tomamos un rectángulo y su diagonal e identificamos los lados opuestos de este rectángulo, tendremos un solo vértice, tres lados y dos triángulos.

e) la superficie no tiene frontera, por lo tanto $k_g = 0$

$$\int_M K = \iint_D K\sqrt{EG - F^2}\,dudv = \iint_D \frac{\sin v}{3+\sin v}(3+\sin v)dudv$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin v dvdu = 0$$

Tiempo: 2 horas
`Buena Suerte!`