UNIVERSIDAD DE LOS ANDES DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MATE2410 Geometría Diferencial 1
Examen Final — (02/12/2005) [1]

Prof. José Ricardo ARTEAGA

Prob.	1	2	3	4	5	Total
Valor	10	10	10	10	10	50
Puntos						

Nombre: Código:

---

1. Llene el espacio en blanco o conteste Falso (F) o Verdadero (V) según el caso. Justificación corta, en la hoja de examen.

   a) Las únicas superficies mínimas de revolución son:
   R/

   b) Las únicas superficies mínimas regladas son:
   R/

   c) Existen superficies mínimas con curvatura de Gauss constante $K > 0$. R/

   d) Existen superficies compactas con curvatura de Gauss constante $K < 0$. R/

   e) La superficie $X(u, v) = (u,\, u^2 \cos v,\, u^2 \sin v)$ tiene K constante. R/

2. Considere la curva $\beta(t) = (1+3\cos t, 2+5\sin t, 3+4\cos t)$ para $t \in \mathbb{R}$. Calcule las siguientes funciones de t: Velocidad, rapidez, aceleración, tangente, normal, binormal, curvatura y torsión.

3. Suponga que $\alpha : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$, es una curva suave parametrizada por la longitud de arco, y que $\alpha(0) = \alpha\left(\frac{\ell}{3}\right) = \alpha(\ell)$. ¿Cuál es el área total máxima posible de todas las regiones acotadas por α?

4. Considere el plano hiperbólico M según el modelo de Poincaré $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ con métrica $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$. Sean $X = y\frac{\partial}{\partial y}$ un campo vectorial en el plano tangente T_pM, y la curva sobre M: $\gamma(t) = (t, t)$ para $1 \leq t \leq 2$. Calcule la holonomía de X a lo largo de γ desde $P = \gamma(1)$ hasta $Q = \gamma(2)$.

[1] El juramento del uniandino dice: "Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad"

5. Considere la superficie M parametrizada por

$$\mathbf{X}(u,v) = ((3+\sin v)\sin u, (3+\sin v)\cos u, \cos v)$$

puede considerar $-\pi/2 \leq u, v, \leq \pi/2$.

a) Halle una fórmula para el normal unitario hacia afuera $U(u,v)$ de M en $\mathbf{X}(u,v)$

b) Halle una fórmula para la curvatura de Gauss $K(u,v)$ de M en $\mathbf{X}(u,v)$

c) Cuáles son todos los valores posibles de la curvatura normal de M en $(4,0,0)$ y en $(2,0,0)$. La respuesta debe expresarla en términos de un intervalo.
Ayuda: *La superfice es un toro. Identifique los ángulos u y v para P y Q, haga un gráfico de la situación. No es necesario hacer cálculos.*

d) Calcule la característica de Euler de M, $\chi(M)$.

e) Calcule la curvatura total de Gauss. Compruebe el Teorema de Gauss-Bonnet para M.

Tiempo: 2 horas
`Buena Suerte!`