UNIVERSIDAD DE LOS ANDES DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MATE 2410 Geometría Diferencial 1

Problemas para preparar Examen Final

Prof. José Ricardo ARTEAGA

Problemas

Un buen entrenamiento es revisar, volver hacer, los exámenes parciales de este semestre y además los siguientes. Algunos de ellos son parecidos y usted encontrará cosas repetidas.

1. Llene los espacios en blanco o diga si es Falso (F) o Verdadero (V) según el caso. **No es necesario justificar**. Conteste este punto aquí mismo.

   a) Si M es una superficie mínima con parametrización isotérmica X, entonces X es una función ____________________

   b) Dada una curva cerrada C en el espacio tridimensional, encontrar la superficie mínima que tenga a C como borde, se conoce como el problema de ____________________

   c) Si $X(u,v) = (u, v, f(u,v))$ es la parametrización de una superficie mínima entonces f es una función armónica. (F o V) ____________________

   d) La función $\phi = x^2 - y^2$ es una función armónica. (F o V) ____________________

2. Sea M una superficie mínima parametrizada con coordenadas isotérmicas X. Demostrar:

   - que $m = 0$
   - y además $l = -n$

   donde los coeficientes de la segunda forma fundamental son $\begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix}$

3. Dadas $(f, g) = (-\frac{i}{2}, \frac{1}{z})$ funciones en variable compleja.

   - Demuestre que f es holomorfa, que g es meromorfa, y que fg^2 es holomorfa en algún dominio D
   - Halle la solución a las ecuaciones integrales de la representación I de Weierestrass-Enneper, para hallar la parametrización de la superficie. Es ésta una superficie conocida?

4. Considere el hiperboloide M de un solo manto $X(u,v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, \sinh v)$. Son los meridianos de esta superficie curvas geodésicas?. Justifique.

5. Sea $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ con parametrización $X(u,v) = (u,v)$ y con métrica conforme

   $$w_1 \circ w_2 = \frac{w_1 \cdot w_2}{v}$$

   donde $w_1, w_2 \in T_p(M)$. Nota este no es el plano de Poincaré (modelo del plano hiperbólico).

   a) Calcule la curvatura de Gauss K de M.

   b) Encuentre las geodésicas. Dibuje unas cuantas.

   c) Es válido el postulado de las paralelas de Euclides? Explique.

d) Es M isométric al plano de Poincaré P? Explique.

e) Calcule la holonomía lo largo de la línea horizontal (euclidiana) desde el punto $(0,1)$ hasta el punto $(a,1)$.

6. Considere el catenoide que es el resultado de la rotación de la catenaria $y = \cosh z$ sobre el eje z. El circulo central que se obtiene cuando rota el punto $(0,1,0)$ es geodésica? Porqué? Es la única geodésica cerrada? Explique.

7. Llene los espacios en blanco o diga si es Falso (F) o Verdadero (V) según el caso. **No es necesario justificar**. Conteste este punto aquí mismo.

   a) Las únicas superficies mínimas de revolución son:

   b) Las únicas superficies mínimas regladas son:

   c) Existen más de tres superficies mínimas.

   d) La esfera S^2 es una superficie mínima.

   e) Existen superficies mínimas con curvatura de Gauss constante $K > 0$.

   f) La catenoide es una superficie de Delaunay.

   g) Existen superficies compactas con curvatura de Gauss constante $K < 0$.

   h) La superficie de revolución $X(u,v) = (u,\, u^2 \cos v,\, u^2 \sin v)$ tiene curvatura de Gauss K constante.

   i) La superficie de revolución $X(u,v) = (u,\, u^2 \cos v,\, u^2 \sin v)$ tiene curvatura media H constante.

   j) La superficie $z = f(x,y) = xy$ es una superficie mínima.

8. Demuestre que una superficie de revolución 'llana' (flat), $K = 0$, es parte de un plano, de un cono o de un cilindro.

9. Considere la superficie de revolución: $X(u,v) = (f(v)\cos u,\, f(v)\sin u,\, g(v))$

   a) Demuestre que las curvas coordenadas (curvas de curvatura, paralelos π y meridianos μ) se cortan ortogonalmente.

   b) Calcule E, F y G en términos de f y g.

10. Una superficie tiene en unas coordenadas (u,v)

$$
\begin{array}{lll}
E = p\,\sin^2 u + \cos^2 u & F = 0 & G = p\,\cos^2 u \\
l = \dfrac{1}{t} & m = 0 & n = \dfrac{\cos^2 u}{t}
\end{array}
$$

donde t es una función que no se anula. Determine el valor del parámetro p para que la superficie sea un trozo de una esfera o un plano.

11. Considere la curva: $\beta(s) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos s,\, \sin s,\, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right)$
Halle la curvatura κ y la torsión τ.

12. Sea $\mathbf{u}_p$ un vector tangente unitario en p a una curva sobre M, $\mathbf{u}_p \in T_pM$, $|\mathbf{u}_p| = 1$, y sea $\beta(s)$ una curva sobre M parametrizada con rapidez unitaria tal que $\beta(0) = p$ y $\beta'(0) = \mathbf{u}_p$. Demuestre que $k(\mathbf{u}_p) = \kappa \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores normales U y N.

13. Demuestre que si M es una superficie mínima, entonces $K \leq 0$. `Ayuda`: *Observe sus curvaturas principales.*

14. Sea M el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ parametrizado por $X(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$

    a) Muestre que el operador forma S está descrito en la base $\{X_u, x_v\}$ por $S(X_u) = -\frac{1}{R} X_u$, $S(X_v) = 0$.

    b) Es ésta una superficie mínima?. Es 'llana' (flat)?. Explique.

15. Conteste Falso (F) o Verdadero (V). Justificación muy corta.

    a) Si $\beta(s) = \displaystyle\int_0^s B_\alpha(t)dt$, donde $\alpha(s)$ es una curva con rapidez unitaria, entonces $\kappa_\beta = \tau_\alpha$.

    b) El operador forma S tiene sus valores propios reales.

    c) Si p es un punto umbílico, entonces $H(p) = 0$.

    d) En términos de longitud de arco sucede que: $\kappa\tau = -T' \cdot B'$

    e) Existe una curva $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\kappa = 0$ y $\tau = 1$

16. Calcule la característica de Euler $\chi = V - E + F$ para

    a) La esfera (Resp. 2)

    b) El toro (Resp. 0)

    c) El disco (Resp. 1)

    d) El cilindro (Resp. 0)

17. Compruebe el Teorema de Gauss-Bonnet para:

    a) La esfera

    b) El toro

    c) El disco

    d) El cilindro