UNIVERSIDAD DE LOS ANDES DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

01372 Geometría Diferencial 1

Cuarto Parcial — (06-05-1993)

Prof. José Ricardo ARTEAGA

NOMBRE:______________________________ CODIGO:______________

1. (Valor: 1.5) Considere la esfera unitaria S^2.

   a) Halle los coeficientes o símbolos de Christoffel de la conexión de Riemann utilizando la métrica de la esfera y la siguiente definición:

$$\Gamma^l_{ij} \; = \; \frac{1}{2} g^{kl}(\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij})$$

   b) Halle los coeficientes o símbolos de Christoffel para la esfera utilizando los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental.

   Nota: Siga los siguientes pasos para hallar la métrica de la esfera:

   a) Considere la métrica euclidiana en $\mathbb{R}^3 : ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Ahora considere la esfera S^2, de radio R como una superficie encajada o inmersa en $\mathbb{R}^3$ con la parametrización natural que dá las coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$ con ϑ el ángulo polar y φ el ángulo del tercer coseno director. Deduzca entonces:

$$ds^2 = R^2(\sin^2 \varphi d\vartheta^2 + d\varphi^2)$$

   b) Luego considere proyección estereográfica de la esfera centrada en el origen con centro de proyección el polo norte y el plano xy como imágen de la proyección. Considere el ángulo α como el ángulo de .ªlzada.º "levantamiento"entre el rayo de la proyección y el plano xy. Demuestre que $\alpha = \varphi/2$ y deduzca entonces que:

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\vartheta^2)$$

   donde r es el radio polar en el plano xy.

   c) Deduzca finalmente utilizando cambio de variables de polares a cartesianas en el plano que:

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + x^2 + y^2)^2}(dx^2 + dy^2)$$

   es decir la esfera S^2 tiene una métrica conforme al plano eucídeo $\mathbb{R}^2$. Las componentes del tensor métrico que habla la fórmula de este problema son justamente las de esta forma.

2. (Valor: 2) a) Demostrar que si el elemento lineal de una superficie es:

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$$

   entonces su curvatura gaussiana está dada por:

$$\kappa = -\frac{1}{2\lambda}\Delta \ln \lambda$$

   donde Δ es el laplaciano.

b) Utilice este resultado para hallar la curvatura gaussiana de la esfera.

c) Halle la curvatura gaussiana de la pseudoesfera. (Rotación de una tractriz)

NOTA: Toda superficie con elemento lineal (*) (primera forma cuadrática), se denomina conforme al plano euclídeo o simplemente *conforme plana*.

d) Halle los símbolos de Christoffel Γ^k_{ij} de una superficie conforme plana.

3. (Valor: 1.5) a) Una aplicaci'on de una superficie sobre otra se denomina *geodésica* si las líneas geodésicas de una corresponden mediante la aplicación a las de la otra. Se puede demostrar, no lo haga, que toda superficie con curvatura gaussiana constante admite una aplicación geodésica sobre el plano euclídeo. Mostrar, haciendo dibujos únicamente, cómo se construiría la aplicación geodésica entre la esfera y el plano. Resuelve esto el problema de hacer mapamundis fieles?.

   b) Hacer tres dibujos, uno un plano, otro una esfera y otro una pseudoesfera. Mostrar, intuitivamente, como se aplica el teorema de Gauss-Bonnet aplicado a un triángulo geodésico en cada una de estas superficies, es decir mostrar intuitivamente que:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_{\Delta} \int \kappa d\delta$$

   c) Si admitiríamos que el universo tuviese una métrica esférica y tres estrellas a igual (aproximadamente) distancia de la tierra las ubicáramos es una bóveda esférica qué resultado esperaríamos al medir la suma de los ángulos interiores al triángulo cuyos vértices son las estrellas?. Depende el resultado de la distancia entre ellas?. En este problema estuvo mucho tiempo trabajando Nicolai Ivanovich Lobatchevski, para tratar de mostrar experimentalmente la existencia de otros tipos de geometrías diferentes a la de Euclídes.