UNIVERSIDAD DE LOS ANDES DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MATE2410 Geometría Diferencial 1
Solución Segundo Parcial — (24/09/2004) [1]

Prof. José Ricardo ARTEAGA

Prob.	1	2	3	4	Total
Valor	10	15	15	10	50
Puntos					

Nombre: Código:

`En cualquiera de los puntos todas las superficies se consideran regulares y en` $\mathbb{R}^3$.

1. Llene los espacios en blanco o diga si es Falso (F) o Verdadero (V) según el caso. **No es necesario justificar**. Conteste este punto aquí mismo.

   a) Las únicas superficies mínimas de revolución son:
   b) Las únicas superficies mínimas regladas son:
   c) Existen más de tres superficies mínimas.
   d) La esfera S^2 es una superficie mínima.
   e) Existen superficies mínimas con curvatura de Gauss constante $K > 0$.
   f) La catenoide es una superficie de Delaunay.
   g) Existen superficies compactas con curvatura de Gauss constante $K < 0$.
   h) La superficie de revolución $X(u, v) = (u,\, u^2 \cos v,\, u^2 \sin v)$ tiene curvatura de Gauss K constante.
   i) La superficie de revolución $X(u, v) = (u,\, u^2 \cos v,\, u^2 \sin v)$ tiene curvatura media H constante.
   j) La superficie $z = f(x, y) = xy$ es una superficie mínima.

   SOLUCIÓN.

   a) Planos, catenoides o pedazos de éstos (Teo. 3.5.7)
   b) Planos, helicoides o pedazos de éstos (Teo. de Catalán)
   c) Verdadero. Catenoide, Plano, Helicoide, de Enneper, de Scherk
   d) Falso. Para que sea mínima $H = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 \Rightarrow K \leq 0$ y $K(S^2) > 0$.
   e) Falso. $H = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 \Rightarrow K \leq 0$
   f) Verdadero. Toda superficie de Delaunay es una superficie de revolución con curvatura media H constante, la cual es generada por una 'roulette' de una cónica, según el teorema de Delaunay. La cateneria es el lugar geométrico de el foco de una parábola 'moviéndose' sobre una recta (roulette). En este caso para la catenoide $H = 0$. (ejercicio 3.6.5)
   g) Falso, contradecería el Teo. 3.5.3
   h) Falso. $K = -\dfrac{2}{u^2(1 + 4u^2)^2}$
   i) Falso. $H = \dfrac{1}{2}\dfrac{1 + 2u^2}{u^2(1 + 4u^2)^{3/2}}$

[1] El juramento del uniandino dice: "Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad

j) Falso. $f_{uu}(1+f_v^2)-2f_uf_vf_{uv}+f_{vv}(1+fu^2)=-2uv\neq 0$

---

2. Demuestre que una superficie de revolución 'llana' (flat), $K=0$, es parte de un plano, de un cono o de un cilindro.

SOLUCIÓN. Para las superficies de revolución $X(u,v)=(g(u),h(u)\cos v,h(u)\sin v)$

---

3. Considere la superficie de revolución: $X(u,v)=(f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ g(v))$

   a) Demuestre que las curvas coordenadas (curvas de curvatura, paralelos π y meridianos μ) se cortan ortogonalmente.

   b) Calcule E, F y G en términos de f y g.

SOLUCIÓN.

a)

---

4. Una superficie tiene en unas coordenadas (u,v)

$$\begin{array}{lll} E=p\sin^2 u+\cos^2 u & F=0 & G=p\cos^2 u \\ l=\dfrac{1}{t} & m=0 & n=\dfrac{\cos^2 u}{t} \end{array}$$

donde t es una función que no se anula. Determine el valor del parámetro p para que la superficie sea un trozo de una esfera o un plano.

SOLUCIÓN.

a)

Tiempo: 50 minutos

`Buena Suerte!`