

**MATE2410 Geometría Diferencial 1**  
**Solución Segundo Parcial — (18/10/2005) <sup>1</sup>**

Prof. José Ricardo ARTEAGA

Prob.	1	2	3	4	5	Total
Valor	15	10	5	10	10	50
Puntos						

Nombre:

Código:

En cualquiera de los puntos todas las superficies se consideran regulares y en  $\mathbb{R}^3$ .

1. Conteste Falso (F) o Verdadero (V) según el caso. **Justificación corta.**

- (a) Si  $M$  es una superficie regular tal que  $H$  es constante, entonces  $K$  es constante.
- (b) Si una superficie regular compacta  $M$  embebida en  $\mathbb{R}^3$  tiene  $K$  constante, entonces  $H$  es constante.
- (c) Una superficie mínima no plana parametrizada en coordenadas isotermas  $l = n$ .
- (d) Si  $M$  es una superficie regular con una parametrización regular  $X(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$  donde  $x^1, x^2$  y  $x^3$  son armónicas, entonces  $M$  es una superficie mínima.
- (e) Si una superficie de revolución  $X(u, v)$  está generada por una curva con rapidez unitaria,  $\alpha(u) = (g(u), h(u), 0)$ , entonces  $K = -\frac{h''}{h}$ .

SOLUCIÓN.

- (a) **Falso.** Contraejemplo el catenoide.
- (b) **Verdadero.** Por el teorema de Liebman  $M$  es una esfera de radio  $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$ , por lo tanto si tomamos la normal exterior  $H = -\frac{1}{R}$ .
- (c) **Falso.** Reemplazando  $E = G$  y  $F = 0$  en  $H$  tenemos  $H = \frac{l+n}{2G}$ , pero como  $M$  es mínima no plana entonces  $l = -n$ .
- (d) **Falso.** Contraejemplo el paraboloides hiperbólico (silla de montar) donde  $H = -2uv \neq 0$  en una parametrización de Monge.
- (e) **Verdadero.** Como  $\alpha$  tiene rapidez unitaria, esto significa que  $g'^2 + h'^2 = 1$ , lo cual implica (diferenciando) que  $g'g'' = -h'h''$ . Reemplazando en  $K$  tenemos que

$$K = \frac{g'(g''h' - h''g')}{h(g'^2 + h'^2)^2} = \frac{g'g''h' - h'g'^2}{h} = \frac{-h'^2h'' - h''g'^2}{h} = -\frac{h''}{h}$$

<sup>1</sup>El juramento del uniandino dice: "Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad"

2. Sea  $M$  una superficie regular y  $X : D \mapsto M$  una parametrización regular. Suponga que para todo  $(u, v) \in D$  se tiene que  $E = 1$ ,  $F = 0$  y  $l = 0$ .

Probar que la curva  $\alpha(t) = X(t, v_0)$ , (donde  $(t, v_0) \in D$ ) es un segmento de recta.

---

SOLUCIÓN.

$$k(\alpha') = k(X_u) = S(X_u) \cdot X_u = X_{uu} \cdot U = l = 0$$

Es decir la curvatura normal  $k(\alpha')$  es cero para todo  $(u, v) \in D$  a lo largo de  $\alpha$ , esto implica que  $U$  es constante a lo largo de  $\alpha$  en todo ese dominio. Por lo tanto  $\alpha$  es una recta en ese dominio.

Lo anterior no significa que  $M$  sea un plano pero si que  $M$  es un cilindro de cualquier tipo, es decir  $U$  no cambia a lo largo de  $\alpha$  pero puede cambiar para otro  $v = v_0$ .

3. Sea  $M$  una superficie regular conexa. Suponga que para cada punto  $p$  existe un  $\lambda_p \in \mathbb{R}$  tal que para toda curva regular  $\alpha : I \rightarrow M$  con  $\alpha(0) = p$  la curvatura normal de  $\alpha$ ,  $k_n(0)$ , satisface  $k_n(0) = \lambda_p$ , en otras palabras, para todo vector unitario  $\mathbf{v} \in T_p(M)$  se tiene que  $k(\mathbf{v}) = \lambda_p$ , donde  $\mathbf{v} = \alpha'(0)$ , y  $\alpha$  parametrizada con rapidez unitaria. Probar que  $M$  es parte de un plano o de una esfera.

---

SOLUCIÓN.

Lo que dice el problema es que todos los puntos son umbílicos, por lo tanto  $M$  es parte de una esfera o un plano.

4. (Casa) Sea  $M$  la pseudoesfera:

$$X(u, v) = \left( \frac{1}{\cosh v} \cos u, \frac{1}{\cosh v} \sin u, v - \tanh v \right)$$

En esta parametrización:

- Calcular los coeficientes  $E$ ,  $F$  y  $G$  de la primera forma fundamental.
- Calcular los coeficientes  $l$ ,  $m$  y  $n$  de la segunda forma fundamental.
- Calcular la curvatura de Gauss  $K$ .
- Calcular los coeficientes del operador forma  $S$ .
- Calcular la curvatura media  $H$ .

---

SOLUCIÓN.

- (a)

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh^2 v} & 0 \\ 0 & \tanh^2 v \end{pmatrix}$$

- (b)

$$II = \begin{pmatrix} -\tanh v \frac{1}{\cosh v} & 0 \\ 0 & \tanh v \frac{1}{\cosh v} \end{pmatrix}$$

- (c)

$$K = -1$$

(d)

$$S = \begin{pmatrix} -\sinh v & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sinh v} \end{pmatrix}$$

(e)

$$H = \frac{1 - \sinh^2 v}{2 \sinh v}$$

5. (Casa) Sea  $F(\tau) = 1$ , lo cual es equivalente a tomar  $(f, g) = (1, z)$ . Mostrar que la representación de Weierstrass-Enneper genera la superficie de Enneper.

---

SOLUCIÓN.

El resultado se obtiene en forma directa. Si se desea comparar con la parametrización usada en clase faltaría hacer una reflexión  $v \rightarrow -v$ .

**Observación.** *Los dos últimos puntos son para resolver en casa. Por favor no use Maple.*

---

Tiempo: 50 minutos

Buena Suerte!