UNIVERSIDAD DE LOS ANDES DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MATE2410 Geometría Diferencial 1
Segundo Parcial — (18/10/2005) [1]

Prof. José Ricardo ARTEAGA

Prob.	1	2	3	4	5	Total
Valor	15	10	5	10	10	50
Puntos						

Nombre: Código:

`En cualquiera de los puntos todas las superficies se consideran regulares y en` $\mathbb{R}^3$.

1. Conteste Falso (F) o Verdadero (V) según el caso. **Justificación corta**.
   a) Si M es una superficie regular tal que H es constante, entonces K es constante.
   b) Si una superficie regular compacta M embebida en $\mathbb{R}^3$ tiene K constante, entonces H es constante.
   c) Una superficie mínima no plana parametrizada en coordenadas isotermales $l = n$.
   d) Si M es una superficie regular con una parametrización regular $X(u,v) = (x^1(u,v), x^2(u,v), x^3(u,v))$ donde x^1, x^2 y x^3 son armónicas, entonces M es una superficie mínima.
   e) Si una superficie de revolución $X(u,v)$ está generada por una curva con rapidez unitaria, $\alpha(u) = (g(u), h(u), 0)$, entonces $K = -\frac{h''}{h}$

2. Sea M una superficie regular y $X : D \mapsto M$ una parametrización regular. Suponga que para todo $(u,v) \in D$ se tiene que $E = 1$, $F = 0$ y $l = 0$.

   Probar que la curva $\alpha(t) = X(t, v_0)$, (donde $(t, v_0) \in D$) es un segmento de recta.

3. Sea M una superficie regular conexa. Suponga que para cada punto p existe un $\lambda_p \in \mathbb{R}$ tal que para toda curva regular $\alpha : I \longrightarrow M$ con $\alpha(0) = p$ la curvatura normal de α, $k_n(0)$, satisface $k_n(0) = \lambda_p$, en otras palabras, para todo vector unitario $\mathbf{v} \in T_p(M)$ se tiene que $k(\mathbf{v}) = \lambda_p$, donde $\mathbf{v} = \alpha'(0)$, y α parametrizada con rapidez unitaria. Probar que M es parte de un plano o de una esfera.

4. (Casa) Sea M la pseudoesfera:
$$X(u,v) = \left(\frac{1}{\cosh v} \cos u, \frac{1}{\cosh v} \sin u, v - \tanh v \right)$$
   En esta parametrización:
   a) Calcular los coeficientes E, F y G de la primera forma fundamental.
   b) Calcular los coeficientes l, m y n de la segunda forma fundamental.
   c) Calcular la curvatura de Gauss K.
   d) Calcular los coeficientes del operador forma S.
   e) Calcular la curvatura media H.

5. (Casa) Sea $F(\tau) = 1$, lo cual es equivalente a tomar $(f, g) = (1, z)$. Mostrar que la representación de Weierstrass-Enneper genera la superficie de Enneper.

Observación. *Los dos últimos puntos son para resolver en casa. Por favor no use Maple.*

Tiempo: 50 minutos
`Buena Suerte!`

---

[1] El juramento del uniandino dice: “Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad”