

MATE 2410 Geometría Diferencial 1
Taller de Preparación Segundo Parcial

Prof. José Ricardo ARTEAGA

Temas

1. Superficies de revolución (3.3)
2. Algunos efectos de la Curvatura (3.5)
3. Superficies de Delaunay (3.6)
4. Primeras nociones de Superficies mínimas (4.1 y 4.2)
5. Minimización de área (4.3)
6. Superficies con Curvatura Media H Constante (4.4)
7. Funciones Armónicas (4.5)
8. Variable Compleja y su relación con superficies con H constante. (4.6)
9. Coordenadas isotermas (4.7)
10. Representaciones I y II de Weierstrass-Enneper

Nota: *El tema: Una fórmula para la curvatura de Gauss (3.4) no se evaluará pero sí más adelante. Los Símbolos de Christoffel los retomaremos al final del curso.*

Pautas

Para este segundo parcial usted debe:

1. Poder calcular a mano todas las curvaturas (Media H , de Gauss K , las principales k_1 , k_2 y la curvatura normal $k_{\mathbf{v}}$) para cualquier superficie y en especial para superficies de revolución.
2. Interpretar cada una de las curvaturas.
3. Conocer y saber el significado de puntos umbílicos. Poder encontrarlos en una superficie dada.
4. Poder calcular explícitamente curvaturas normales, en cualquier punto de una superficie y en cualquier dirección. Incluso si los puntos son umbílicos. Su resultado qué es un número o un vector? Qué significa?
5. Poder interpretar y calcular las derivadas covariantes. Su resultado qué es?, un número o un vector? Qué significa?
6. Conocer y saber aplicar los teoremas 3.5.3, 3.5.4, 3.5.5 (Liebmann), 3.5.6 (Hilbert), 3.5.7

7. Conocer cuál es la ecuación diferencial que debe satisfacer una superficie de revolución $X(u, v) = (u, h(u) \cos v, h(u) \sin v)$ para que tenga curvatura de Gauss K constante?. Conocer al menos una solución y poder comprobarla.
8. Conocer cuál es la ecuación diferencial que debe satisfacer una superficie de revolución $X(u, v) = (u, h(u) \cos v, h(u) \sin v)$ para que tenga curvatura media H constante?. Conocer al menos una solución y poder comprobarla.
9. Conocer la ecuación diferencial que caracteriza a las superficies mínimas cuando éstas son de la forma $z = f(x, y)$ y además se usa la parametrización de Monge. Conocer al menos una solución y poder comprobarla.
10. Conocer y poder aplicar los teoremas de Ros, de Alexandrov
11. Poder decidir cuando una función en variable compleja es analítica (holomorfa) y meromorfa. Cuando una función es armónica.
12. Conocer cuál es la relación de superficies mínimas en lenguaje de variable compleja.
13. No confundir superficies mínimas con superficies con curvatura media constante.
14. No confundir pompas de jabón con películas de jabón. Cuáles son los resultados en geometría diferencial acerca de cada una de éstas.
15. Conocer y poder decir cuando una parametrización es isothermal. Para cuáles superficies existen siempre una parametrización isothermal. De qué sirve parametrizar una superficie en este tipo de coordenadas.
16. Conocer y poder usarlas las representaciones de Weierstrass-Enneper de primer tipo (I) o de segundo (II). Para qué tipo de superficies existen siempre. Para qué sirven este tipo de representaciones?

Problemas

Para los cuatro primeros problemas usted debe usar los resúmenes, en el cual encuentra las ecuaciones de una **catenoide** y una **helicoides**.

1. Compruebe que las fórmulas dadas son correctas. Calcule sus curvaturas principales.
2. Existen puntos umbílicos en cada una de estas superficies?. Encuentre uno, en coordenadas.
3. Escoja un punto sobre la superficie y una dirección en el plano tangente en esta superficie que no sea una de las principales. Calcule la curvatura normal en este punto en esa dirección. Si el punto escogido es un punto umbílico cómo es la curvatura normal en esa dirección y en las direcciones principales?
4. En las superficies dadas, catenoide y helicoides, existen puntos con curvatura gaussiana $K(p) > 0$?. Por qué si o porqué no?. Qué tiene que ver el teorema 3.5.3 con esta pregunta?
5. Existen superficies no compactas con curvatura gaussiana constante $K > 0$?. Dé un ejemplo concreto en caso de existir. En caso contrario argumente su respuesta.
6. Podrá existir una superficie compacta con curvatura gaussiana constante $K < 0$?. Dé un ejemplo concreto en caso de existir. En caso contrario argumente su respuesta.

7. Demuestre que una superficie de revolución si es minimal entonces está contenida en un plano o en un catenoide.

8. Mostrar que $\Delta(2\ln(1 + u^2 + v^2)) = \frac{8}{(1+u^2+v^2)^2}$

9. Demostrar que para una superficie mínima con representación de de Weierstrass-Enneper II

$$(1) \quad K = \frac{-4}{|F|^2(1 + u^2 + v^2)^4}$$

10. En el problema anterior si identifica $F = \frac{f}{g'}$ demuestre que obtiene

$$(2) \quad K = \frac{-4|g'|^2}{|f|^2(1 + |g|^2)^4}$$

en términos de la representación de Weierstrass-Enneper I.

11. Si compara las fórmulas obtenidas (1) con (2) en la primera K nunca es cero, mientras que en la segunda si puede llegar a ser cero. Explique la discrepancia aparente de estos dos resultados. **Ayuda:** *Cuál es la hipótesis sobre g permitida para transformar de la representación I a la II?*

12. Resolver ciertas integrales complejas determinadas por las representaciones de Weierstrass-Enneper para hallar la parametrización de ciertas superficies mínimas, por ejemplo para el catenoide, el helicoide, la superficie de Catalán, la superficie de Henneberg

13. Demuestre que los puntos umbílicos de una superficie mínima con representación (f, g) corresponden a ceros de g' . Por lo tanto los puntos umbílicos de una superficie mínima son planos (*flat*).