Universidad de los Andes — Departamento de Matemáticas

MATE2410 Geometría Diferencial 1
Solución del Tercer Parcial — (25/10/2004) [1]

Prof. José Ricardo ARTEAGA

Prob.	1	2	3	4	Total
Valor	10	10	15	15	50
Puntos					

Nombre: Código:

`En cualquiera de los puntos todas las superficies se consideran regulares y en` $\mathbb{R}^3$.

1. Llene los espacios en blanco o diga si es Falso (F) o Verdadero (V) según el caso. **No es necesario justificar**. Conteste este punto aquí mismo.

   a) Si M es una superficie mínima con parametrización isotérmica X, entonces X es una función ____ ARMÓNICA. $\Delta X = (2EH)U$ *y como* M *es una superficie mínima, entonces* $H = 0 \Longrightarrow \Delta X = 0$. *Aquí se entiende que cada componente es armónica.*

   b) Dada una curva cerrada C en el espacio tridimensional, encontrar la superficie mínima que tenga a C como borde, se conoce como el problema de ____ PLATEAU. *Problema planteado a principios del siglo IXX y resuelto un poco más de 100 años después.*

   c) Si $X(u,v) = (u, v, f(u,v))$ es una parametrización de una superficie mínima entonces f es una función armónica. (F o V) ____ FALSO. *La garantía de que esto suceda es únicamente cuando la parametrización es isotérmica.*

   d) La función $\phi = x^2 - y^2$ es una función armónica. (F o V) ____ VERDADERO. *Satisface la ecuación de Laplace.*

   e) La parametrización $X(u,v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, \sinh v)$ es isotérmica. (F o V) ____ FALSO. $E = \cosh^2 v$ y $G = \cosh^2 v \sinh^2 v$, por lo tanto $E \neq G$

2. Sea M una superficie mínima parametrizada con coordenadas isotérmicas X. Demostrar que $l = -n$, donde los coeficientes de la segunda forma fundamental en forma matricial son: $\begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix}$

   Solución
   Dado que la curvatura media $H = 0$, y los coeficientes de la métrica son $E = G$ y $F = 0$, entonces reemplazando,

   $$H = \frac{Gl + En - 2Fm}{EG - F^2} \Longrightarrow H = \frac{El + En}{E^2} = 0 \Longrightarrow l = -n$$

3. Sea $(f, g) = (1, z)$. Demuestre que la Representación I de Weierestrass-Enneper le da la parametrización de la superficie de Enneper.

   Solución
   $$x^1(u,v) = Re\int (1 - z^2)dz = Re\left(z - \frac{z^3}{3}\right) = u - \frac{u^3}{3} + uv^2$$
   $$x^2(u,v) = Re\int i(1 + z^2)dz = Re\, i\left(z + \frac{z^3}{3}\right) = -v + \frac{v^3}{3} + u^2 v$$
   $$x^3(u,v) = Re\int 2z dz = Re\, z^2 = u^2 - v^2$$

---

[1] El juramento del uniandino dice: "Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad"

Lo cual muestra que es la parametrización de una superficie de Enneper. Si se desea obtener aquella parametrización vista en clase, puede usar la transformación $u = u$ y $v = -v$, la cual es una reflexión sobre el eje u del plano uv sobre si mismo.

4. Considere el hiperboloide M de un solo manto $X(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, \sinh v)$. Los meridianos y los paralelos de esta superficie son geodésicas?. Justifique.

SOLUCIÓN

a) Los **meridianos** son cuando $v = t$ (variable) y $u = u_0$ (constante). En tal caso $\alpha'(t) = X_u$, es decir α es la curva que tiene la dirección del vector tangente X_u. En este caso, tenemos: $X_u = (-\cosh v \sin u,\ \cosh v \cos u,\ 0)$
$X_v = (\sinh v \cos u,\ \sinh v \sin u,\ \cosh v)$
$E = X_u \cdot X_u = \cosh^2 v$
$G = X_v \cdot X_v = \cosh^2 v + \sinh^2 v$
$F = X_u \cdot X_v = 0$
por lo tanto
$$E_u = 0, \qquad G_u = 0 \qquad u' = \frac{du}{dt} = 0 \qquad v' = \frac{dv}{dt} = 1$$
Reemplazando en la fórmula de la curvatura geodésica, tenemos
$$k_g = \sqrt{EG}\left(\frac{G_u}{2E}\right) = 0$$
Es decir los meridianos si son geodésicas, pues su curvatura geodésica $k_g = 0$.

b) Los **paralelos** no son geodésicas en general, pues usando el mismo razonamiento para cuando $u = t$ (variable) y $v = v_0$ (constante), dado que $u' = \frac{du}{dt} = 1$ y $v' = \frac{dv}{dt} = 0$ tenemos que:
$k_g = \sqrt{EG}\left(\frac{E_v}{2G}\right)$ lo cual como muestra el resultado del cálculo de E depende de v en general, y por tanto no se garantiza la nulidad de la curvatura geodésica en general.

Tiempo: 50 minutos
`Buena Suerte!`