UNIVERSIDAD DE LOS ANDES DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MATE2410 Geometría Diferencial 1

Tercer Parcial — (15/11/2005)

Prof. José Ricardo ARTEAGA

Nombre: Código:

#	Ciudad	Latitud	Longitud
1	Cali	3° 25' N	76° 30' W
2	Barcelona	41° 24' N	2° 9' E
3	Baranquilla	10° 59' N	74° 48' W
4	Bogotá	4° 36' N	74° 5' W
5	Estocolmo	59° 21' N	18° 4' E
6	St.Petersburgo	59° 56' N	30° 16' E
7	Madrid	40° 25' N	3° 41' W
8	Medellín	6° 13' N	75° 36' W
9	Moscow	55° 46' N	37° 40' E
10	NYC-Central Park	40° 47' N	73° 58' W

El radio de la tierra es aproximadamente 6,371Km.

1. Encuentre el área en Km^2 de un cuadrado de un grado de latitud y un grado de longitud centrado en las ciudades 1,2 y 3. Compare los resultados.
2. Encuentre el área en Km^2 de un cuadrado de un grado de latitud y un grado de longitud centrado en las ciudades 4,5 y 6. Compare los resultados.
3. Encuentre el área en Km^2 de un cuadrado de un grado de latitud y un grado de longitud centrado en las ciudades 7,8 y 9. Compare los resultados.
4. Encuentre el área en Km^2 de un cuadrado de un grado de latitud y un grado de longitud centrado en las ciudades 1,5 y 10. Compare los resultados.
5. Pruebe que el área de la bóveda de Viviani, que es la región de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ limitada por el cilindro $(x-a)^2 + y^2 \leq a^2$ y $z \geq 0$ es $4a^2(\pi - 2)$
6. Dar la expresión de la curvatura de Gauss para una superficie regular en un sistema de coordenadas ortogonales.
7. Si la métrica de una superficie está dada por $ds^2 = \lambda(u,v)(du^2 + dv^2)$ pruebe que

   $$K = -\frac{1}{2\lambda}\Delta \log \lambda \tag{1}$$

   donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ es el Laplaciano de $\mathbb{R}^2$ y λ es una función positiva. Calcule la curvatura de Gauss de una superficie en la cual $E = G = 1/(u^2 + v^2 + c^2)^2$ y $F = 0$
8. Si la métrica de una superficie está dada por $ds^2 = \lambda(u,v)(du^2 + dv^2)$ pruebe que

   $$K = -\frac{1}{2\lambda}\Delta \log \lambda \tag{2}$$

   donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ es el Laplaciano de $\mathbb{R}^2$ y λ es una función positiva. Calcule la curvatura de Gauss del plano hiperbólico según e modelo de Poincaré $\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ con métrica $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$

9. Considere el plano hiperbólico M según e modelo de Poincaré $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ con métrica $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$. Sean $X = x\frac{\partial}{\partial x}$ y $Y = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$ dos campos vectoriales en el plano tangente T_pM, y la curva sobre M $\gamma(t) = (t, \alpha t)$ para $t > 0$.
Calcule

   a) $\nabla_X Y$
   b) El transporte paralelo de X a lo largo de γ
   c) La curvatura geodésica de γ
   d) Las ecuaciones de las geodésicas que pasan por $P = \gamma(1)$ en dirección de X.
   e) La holonomía de X desde $P = \gamma(1)$ hasta $Q = \gamma(2)$

10. Considere el plano hiperbólico M según e modelo de Poincaré $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ con métrica $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$. Sean $X = x\frac{\partial}{\partial x}$ y $Y = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$ dos campos vectoriales en el plano tangente T_pM, y la curva sobre M $\gamma(t) = (t, t)$ para $t > 0$.
Calcule

   a) $\nabla_Y X$
   b) El transporte paralelo de Y a lo largo de γ
   c) La curvatura geodésica de γ
   d) Las ecuaciones de las geodésicas que pasan por $P = \gamma(1)$ en dirección de Y.
   e) La holonomía de Y desde $P = \gamma(1)$ hasta $Q = \gamma(2)$
