

MATE 2410 Geometría Diferencial 1
Resumen de Teoremas y Fórmulas Importantes

Prof. José Ricardo ARTEAGA

1. Curvas

- 1.
- Involuta**
- de una curva
- α

$$\mathcal{I}(t) = \alpha(t) - s(t) \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$$

donde $s(t) = \int_a^t |\alpha'(u)| du$

- 2.
- Evoluta**
- de una curva
- α

$$\mathcal{E}(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t)$$

3. Curva
- podaria**
- o curva pedal de una curva
- α
- respecto a un punto
- p
- .

$$\mathcal{P}(t) = p + [(\alpha(t) - p) \cdot N(t)] N(t)$$

4. Vector
- tangente**
- :

$$T(s) = \beta'(s)$$

donde $\beta(s)$ es la **re-parametrización** de $\alpha(t)$ en términos de la longitud de arco, es decir despejando t en términos de s de la ecuación $s(t) = \int_a^t |\alpha'(u)| du$ y reemplazando en $\alpha(t)$.

- 5.
- Curvatura**
- de una curva
- α

$$\kappa(s) = |T'(s)|$$

6. Vector
- normal**
- principal

$$N(s) = \frac{1}{\kappa} T'(s)$$

7. Vector
- binormal**
- :

$$B = T \times N$$

- 8.
- Torsión**
- de una curva:

$$\tau = -N \cdot B'$$

9. Fórmulas de
- Frenet**
- :

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\nu & 0 \\ -\kappa\nu & 0 & \tau\nu \\ 0 & -\tau\nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

donde el primer grupo está dado en término de la longitud de arco s y el segundo en general, donde $\nu = |\alpha'(t)|$, es decir la rapidez de la partícula. La s derivadas se hacen según el parámetro.

10. Otras fórmulas en términos de un parámetro normal (corriente)

$$T = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|} \quad N = B \times T \quad \kappa = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} \quad \tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{|\alpha' \times \alpha''|^2}$$

11. Vector de
- Darboux**
- ω
- .

$$\begin{aligned} T' &= \omega \times T \\ N' &= \omega \times N \\ B' &= \omega \times B \end{aligned}$$

2. Superficies

1. **Vector normal unitario.**

$$U = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$$

2. **Operador forma S .**

$$S_p(\mathbf{v}) = -\nabla_{\mathbf{v}}U \quad S_p \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}$$

3. **Coefficientes de la Primera Forma Fundamental ($[EFG]$)**

$$E = X_u \cdot X_u, \quad F = X_u \cdot X_v, \quad G = X_v \cdot X_v \quad [EFG] = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

La **métrica** de la superficie en \mathbb{R} se escribe $ds^2 = Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2$

4. **Coefficientes de la Segunda Forma Fundamental ($[lmn]$)**

$$l = U \cdot X_{uu}, \quad m = U \cdot X_{uv}, \quad n = U \cdot X_{vv} \quad [lmn] = \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix}$$

donde $l = S_p(X_u) \cdot X_u = U \cdot X_{uu}$, $m = S_p(X_u) \cdot X_v = U \cdot X_{uv}$, y $n = S_p(X_v) \cdot X_v = U \cdot X_{vv}$. Para hallar los valores de a, b, c, d se usan las anteriores propiedades.

5. **Relación entre el operador forma y las formas fundamentales ($[S][EFG] = [lmn]$):**

$$\begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

3. Curvaturas

Curvaturas: Curvatura normal ($k(\mathbf{u}_p)$), Curvaturas principales (k_1 y k_2), Curvatura de Gauss (K) y Curvatura media (H).

$$k(\mathbf{u}_p) = S(\mathbf{u}_p) \cdot \mathbf{u}_p; \quad K = \det(S) = k_1 k_2; \quad H = \frac{1}{2} \text{tr}(S) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

donde $\mathbf{u}_p \in T_p M$ es un vector tangente, y k_1 y k_2 son los valores propios de S . A los vectores propios de S se les llaman *direcciones principales*.

Lema (fuerte): Sea α una curva sobre una superficie regular $M \subset \mathbb{R}^3$, entonces $\alpha'' \cdot U = S(\alpha') \cdot \alpha'$.

La *curvatura de Gauss* K y la *curvatura media* H en términos de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental están dadas por:

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} \quad H = \frac{Gl + En - 2Fm}{2(EG - F^2)}$$

Superficies de revolución

Sea $X(u, v) = (g(u), h(u) \cos v, h(u) \sin v)$ una superficie de revolución, entonces los coeficientes de la **primera forma fundamental**, de la **segunda forma fundamental**, la **curvatura de Gauss** K y la **curvatura media** H están dados por:

$$E = g'^2 + h'^2 \quad F = 0 \quad G = h^2$$

$$l = \frac{g''h' - h''g'}{\sqrt{g'^2 + h'^2}} \quad m = 0 \quad n = \frac{hg'}{\sqrt{g'^2 + h'^2}}$$

$$K = \frac{g'(g''h' - h''g')}{h(g'^2 + h'^2)^2}$$

$$H = \frac{k_\mu + k_\pi}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{-h''}{(1 + h'^2)^{3/2}} + \frac{1}{h(1 + h'^2)^{1/2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{-hh'' + 1 + h'^2}{h(1 + h'^2)^{3/2}} \right)$$

Teorema 3.5.2 Una superficie que consiste solo de puntos umbílicos está contenida o en una esfera o en un plano.

Teorema 3.5.3 Sobre toda superficie compacta $M \subseteq \mathbb{R}^3$ hay al menos un punto p tal que $K(p) > 0$

Corolario 3.5.4 No existen superficies compactas en \mathbb{R}^3 con $K \leq 0$. En particular no es posible tener superficies mínimas inmersas uno a uno (embedding='embebidas') en \mathbb{R}^3 que sean compactas.

Teorema 3.5.5 (Liebmann) Si M es una superficie compacta con curvatura de Gauss constante K , entonces M es una esfera de radio $1/\sqrt{|K|}$.

Lema 3.5.6 (Hilbert) Si k_1 tiene un máximo en p , k_2 tiene un mínimo en p y $k_1(p) > k_2(p)$, entonces $K(p) \leq 0$

Teorema 3.5.7 Si una superficie de revolución M es mínima, entonces está contenida o en un plano o en un catenoide.

4. Superficies con curvatura media H constante

Proposición 4.2.2 Sea $z = f(x, y)$ un función de dos variables. Si tomamos la parametrización de Monge para este gráfico, $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$, la superficie M es mínima si y solo si

$$f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_u f_v f_{uv} + f_{vv}(1 + f_u^2) = 0$$

Además

$$H = \frac{f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_u f_v f_{uv} + f_{vv}(1 + f_u^2)}{2(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}}$$

Observación A la ecuación

$$f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_u f_v f_{uv} + f_{vv}(1 + f_u^2) = 0$$

se le llama la ecuación de Euler-Lagrange, y puede ser obtenida optimizando el funcional de área. Las curvaturas medias de las superficies mínimas son entonces puntos críticos de este funcional.

Teorema 4.2.6 (Catalan) Toda superficie reglada mínima en \mathbb{R}^3 es parte de un plano o de una helicoides.

Teorema 4.3.4. Si M es una superficie que minimiza área, y M es la gráfica de una función $z = f(x, y)$ entonces M es una superficie mínima.

Teorema 4.4.4. Una pompa de jabón debe siempre tomar la forma de una superficie de curvatura media constante.

Teorema 4.4.5. (Ros) Sea M una superficie compacta embebida en \mathbb{R}^3 , la cual acota un dominio D que tiene volumen Vol . Si $H > 0$, entonces

$$\int_M \frac{1}{|H|} dA \geq 3Vol.$$

La igualdad se satisface únicamente para la esfera estándar, para la cual se toma la normal interior. En este caso $H = \frac{1}{R} > 0$

Teorema 4.4.6. (Alexandrov) Si M es una superficie compacta embebida en \mathbb{R}^3 de curvatura media constante entonces M es la esfera estándar S^2 .

Definición 4.5.1. Una función real $\phi(x, y)$ es armónica si todas las segundas derivadas son continuas en todos los puntos del dominio y además satisfacen la ecuación de Laplace $\nabla^2 \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$

Teorema 4.5.3. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es una función de variable compleja analítica¹, entonces u y v son armónicas.

Teorema 4.7.1. Las coordenadas isotérmicas siempre existen para cualquier superficie $M \subseteq \mathbb{R}^3$ mínima.

Teorema 4.8.2. Sea $X(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z}))$ una parametrización isotérmica de M y sea $\phi = \frac{\partial X}{\partial z}$. La superficie M es mínima si y solo si ϕ^i son holomorfas.

Representaciones de Weierstrass-Enneper

El objetivo es usar las relaciones de funciones holomorfas y meromorfas para producir superficies Mínimas.

Definición 1. Si una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ compleja de variable compleja no es holomorfa (analítica) en z_0 , pero si lo es en por lo menos un punto de toda vecindad de z_0 diremos que f tiene una *singularidad* en z_0 , o que z_0 es un *punto singular* de f .

Definición 2. Un punto z_0 singular de f se llama *polo*, si alrededor de cada vecindad de z_0 existe una *expansión de Laurent* (generalización de la expansión de Taylor en variable real) de la forma:

$$g(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j \quad a_{-n} \neq 0$$

para algún n finito con coeficientes determinados por g .

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Si $n = 1$ se denomina polo simple y si $n \neq 1$ se le llama polo de orden n . Los ejemplos más importantes de funciones meromorfas son las funciones racionales $f(z) = \mathcal{P}(z)/\mathcal{Q}(z)$ donde $\mathcal{P}(z)$ y $\mathcal{Q}(z)$ son funciones polinomiales.

Definición 3. Una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ compleja de variable compleja, se llama *meromorfa* si todas sus singularidades son polos.

Definición 4.

$$e^z = e^u(\cos v + i \sin v) \quad \log(z) = \ln \sqrt{u^2 + v^2} + i \arctan \left(\frac{v}{u} \right) \quad (4.1)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (4.2)$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad (4.3)$$

Fórmulas

$$\sin z = \sin u \cosh v + i \cos u \sinh v \quad (4.4)$$

$$\cos z = \cos u \cosh v + i \sin u \sinh v \quad (4.5)$$

$$\sinh z = \sinh u \cos v + i \cosh u \sin v \quad (4.6)$$

$$\cosh z = \cosh u \cos v + i \sinh u \sin v \quad (4.7)$$

¹ Una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es *analítica u holomorfa*, es decir que $f'(z)$ exista en cada punto de una región D del plano complejo \mathbb{C} si y solo si todas sus derivadas parciales de las funciones componentes existen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ y además satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Una función f se dice que es *meromorfa* si todas sus singularidades son polos. Toda función racional $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ con $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios es una función meromorfa.

Representación I

Teorema 4.8.6. (Representación I de Weierstrass-Enneper). Si f es holomorfa sobre un dominio D , g es meromorfa sobre D y fg^2 es holomorfa sobre D , entonces una superficie mínima está definida por $X(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z}))$, donde

$$x^1(z, \bar{z}) = \operatorname{Re} \int f(1 - g^2)dz \quad x^2(z, \bar{z}) = \operatorname{Re} \int if(1 + g^2)dz \quad x^3(z, \bar{z}) = \operatorname{Re} 2 \int fgdz$$

Representación II

Teorema 4.8.7. (Representación II de Weierstrass-Enneper). Para cualquier función holomorfa $F(\tau)$, una superficie mínima está definida por $X(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z}))$, donde

$$x^1(z, \bar{z}) = \operatorname{Re} \int F(\tau)(1 - \tau^2)d\tau \quad x^2(z, \bar{z}) = \operatorname{Re} \int iF(\tau)(1 + \tau^2)d\tau \quad x^3(z, \bar{z}) = \operatorname{Re} 2 \int F(\tau)\tau d\tau$$

5. Geodésicas, Métricas e Isometrías

Definición. La *curvatura geodésica* de una curva $\alpha(t)$ sobre una superficie $M \subseteq \mathbb{R}^3$ está definida por $k_g = \alpha'' \cdot U \times T$, donde T es el vector tangente unitario a α y U el vector normal unitario a M . Una curva α en M es geodésica si $\alpha''_{tan} = 0$, donde $\alpha''_{tan} = k_g U \times T$ es la componente tangencial de la aceleración.

Teorema 5.1.5. La curvatura geodésica depende solo de la métrica. Si $F = 0$, entonces

$$k_g = \sqrt{EG} \left(-\frac{E_v}{2G} u'^3 + \left(\frac{G_u}{G} - \frac{E_u}{2E} \right) u'^2 v' + \left(\frac{G_v}{2G} - \frac{E_v}{E} \right) u' v'^2 + \frac{G_u}{2E} v'^3 + u' v'' - u'' v' \right)$$

Ecuaciones de las Geodésicas.

$$\begin{cases} u'' + \frac{E_u}{2E} u'^2 + \frac{E_v}{E} u' v' - \frac{G_u}{2E} v'^2 = 0, & (1) \\ v'' - \frac{E_u}{2G} u'^2 + \frac{G_u}{G} u' v' + \frac{G_v}{2G} v'^2 = 0, & (2) \end{cases}$$

Teorema 5.2.3. Sea $P = \mathbf{X}(u_0, v_0)$ un punto sobre una superficie $M : \mathbf{X}(u, v)$ y $\mathbf{v} \in T_P M$. Entonces existe una única geodésica $\alpha : (-r, r) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = P$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$

Definición. La superficie M se llama *geodésicamente completa* si toda geodésica (rapidez unitaria) tiene dominio \mathbb{R}

Teorema 5.3.1 (Hopf-Rinow). Si M es geodésicamente completa, entonces cualesquier par de puntos sobre M se pueden unir por medio de una geodésica, la cual tiene la longitud más corta entre todas las curvas que unen estos dos puntos.

Definición (Isometría). Sean $M : \mathbf{X}(u, v)$ y $N : \mathbf{Y}(r, s)$ dos superficies. Si existen funciones suaves r y s del dominio de \mathbf{X} al dominio de \mathbf{Y} , $I : M \rightarrow N$, con parametrizaciones ortogonales ($F_{\mathbf{X}} = F_{\mathbf{Y}} = 0$),

$$I(\mathbf{X}(u, v)) = \mathbf{Y}(r(u, v), s(u, v))$$

tal que

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{X}} &= X_u \circ_X X_u = I_*(X_u) \circ_Y I_*(X_u) = E_Y r_u^2 + G_Y s_u^2 \\ G_{\mathbf{X}} &= X_v \circ_X X_v = I_*(X_v) \circ_Y I_*(X_v) = E_Y r_v^2 + G_Y s_v^2 \end{aligned}$$

Definición 5.4.1 (Definición Importante de Gauss). Para una superficie con métrica ortogonal ($F = 0$), la curvatura de Gauss se define:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right) \quad (5.1)$$

Observación: Esta fórmula se puede demostrar, y de hecho lo hicimos en clase, ver ejercicio 3.4.5, resuelto en clase. Esta fórmula sirve para demostrar el famoso Teorema Egregium de Gauss.

Teorema 5.5.1. (Teorema Egregium de Gauss). La curvatura de Gauss K de una superficie M es invariante por isometrías locales, es decir si $I : M \rightarrow N$ es una isometría $K_M(P) = K_N(I(P))$ para todo $P \in M$

Teorema 5.5.8. Una isometría envía geodésicas en geodésicas. Es decir, si $\alpha(t)$ es una geodésica en una superficie $M : \mathbf{X}(u, v)$ y $I : M \rightarrow N$ es una isometría, entonces la curva $\beta(t) = I(\alpha(t))$ es una geodésica de $N : \mathbf{Y}(r, s)$.

6. Holonomía y el Teorema de Gauss-Bonnet

Curvatura total de Gauss

Definición. La *curvatura total de Gauss* de una superficie $M : \mathbf{X}(u, v)$ es

$$\int_M K = \iint_{\mathbf{X}} K |X_u \times X_v| dudv = \iint_{\mathbf{X}} K \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Derivada covariante

Definición. Suponga que $Z = \sum_k z^k(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_k$ es un campo vectorial sobre M y que \mathbf{v} es un vector unitario en el plano tangente $\mathbf{v} \in T_P M$. La *derivada covariante* de una superficie $M : \mathbf{X}(u, v)$ es:

$$\nabla_{\mathbf{v}} Z = \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}[z^i] \mathbf{e}_i$$

donde $\mathbf{v}[z^i]$ es la derivada direccional de la componente z^i en la dirección de \mathbf{v}

Casos particulares.

$$\nabla_{X_u} Z = \sum_k \left(\sum_i \frac{\partial z^k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} \right)$$

$$\nabla_{X_v} Z = \sum_k \left(\sum_i \frac{\partial z^k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial v} \right)$$

$$\nabla_{\mathbf{v}} U = \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} (u^i(\alpha(t)))|_{t=0} \mathbf{e}_i$$

donde $\alpha(0) = P$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. Además

$$S_P(\mathbf{v}) = -\nabla_{\mathbf{v}} U$$

donde S_P es el *operador forma o aplicación de Weingarten* de M en P , la cual es una aplicación lineal de $T_P M$ sobre sí mismo.

$$\nabla_{\mathbf{v}} Z = \nabla_{\mathbf{v}}^{\mathbb{R}^3} Z - \left(\nabla_{\mathbf{v}}^{\mathbb{R}^3} Z \cdot U \right) U$$

donde $\nabla^{\mathbb{R}^3}$ es la derivada covariante en \mathbb{R}^3 o simplemente la matriz Jacobiana y ∇ es la proyección de $\nabla^{\mathbb{R}^3}$ sobre el plano tangente, es decir la derivada covariante de M sin 'mirar' el espacio \mathbb{R}^3 .

Observación.

$$\nabla_{\alpha'}^{\mathbb{R}^3} \alpha' = \alpha''$$

Si α es una curva geodésica, entonces

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' = 0$$

Para una parametrización ortogonal ($F = 0$) de $M : \mathbf{X}(u, v)$ podemos definir una base ortonormal para $T_P M$ así:

$$\varepsilon_1 = \frac{X_u}{\sqrt{E}} \quad \varepsilon_2 = \frac{X_v}{\sqrt{G}}$$

En este caso

$$\nabla_{\alpha'} \varepsilon_1 = \omega_{11} \varepsilon_1 + \omega_{21} \varepsilon_2 + s_1 U \quad \nabla_{\alpha'} \varepsilon_2 = \omega_{12} \varepsilon_1 + \omega_{22} \varepsilon_2 + s_2 U$$

Se puede demostrar, usando el hecho que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ es una base ortonormal, que $\omega_{ii} = 0$ y que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, por lo tanto para la superficie M sólo hay una componente sustancial ω_{21} , donde

$$\nabla_{\alpha'} \varepsilon_1 = \omega_{21} \varepsilon_2$$

Campos vectoriales paralelos y holonomía

Definición. Decimos que V es una campo vectorial que se transporta paralelamente a lo largo de α si

$$\nabla_{\alpha'} V = 0$$

Teorema 6.3.2. Sea M una superficie con derivada covariante ∇ y supongamos que $\alpha : I \rightarrow M$ es una curva sobre M . Para cualquier vector tangente a M , V_0 en $\alpha(0)$, existe un campo vectorial V que se transporta paralelamente a lo largo de α con $V_{\alpha(0)} = V_0$

Si tomamos V unitario

$$V = \cos(\theta) \varepsilon_1 + \sin(\theta) \varepsilon_2$$

donde θ es el ángulo entre V y ε_1 , entonces la curvatura geodésica de α es

$$\kappa_g = \frac{d\theta}{dt} + \omega_{21}$$

Definición. La holonomía a lo largo de una curva $\alpha(t)$, desde t_0 , hasta t_1 , de un campo vectorial V unitario sobre M es

$$\text{hol}(\alpha) = - \int_{t_0}^{t_1} \omega_{21} dt$$

donde θ es el ángulo entre V y ε_1 .

Teorema 6.3.5 Las isometrías preservan la holonomía.

Teorema Sea $\alpha(s)$ una curva con rapidez unitaria sobre una superficie $M : \mathbf{X}(u, v)$, con parametrización ortogonal ($F = 0$). Entonces

$$\nabla_{\alpha'} \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = \omega_{21} = \kappa_g - \frac{d\theta}{ds}$$

donde

$$\omega_{21} = \frac{-E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds}$$

Teorema 6.6.1 (Teorema de Gauss-Bonnet). Si M es una superficie compacta orientable con frontera ∂M , compuesta por un número finito de curvas suaves, entonces

$$\int_{\partial M} \kappa_g + \int_M K = 2\pi\chi(M)$$

donde $\chi(M)$ es la característica de Euler de M . La característica de Euler no depende de la triangulación de M ,

$$\chi(M) = V - E + F$$

donde V es el número total de vértices en la triangulación, E es el número total de lados en la triangulación y F es el número total de triángulos en la triangulación.