

MATE 2410 Geometría Diferencial 1**Tarea # 2 en grupos (2 o 3)**Prof. José Ricardo ARTEAGA

1. Este punto tiene como objetivo que usted se familiarice con algunas superficies, que las vea una y otra vez, que se acuerde de sus nombres y de algunas de sus propiedades que definen su geometría. Algo así como lo que ocurre en el curso de cálculo diferencial que algunas funciones al ver su representación algebraica uno se imagina su representación en el plano. Aunque algunas de ellas ya son muy conocidas se quiere que recuerde algo de aquellas que lo son menos.

Analice cuidadosamente las siguientes superficies. Para ello calcule, usando Maple si lo desea, las curvaturas media H , de Gauss K y las principales k_1 y k_2 . Clasifíquelas según sea superficie mínima, superficie con curvatura constante, con curvatura negativa, de revolución o compacta. Si hay puntos umbílicos diga dónde están. En el informe de este punto incluya los gráficos, solo si estima lo necesario, donde usted ha podido observar el significado de cada uno de los resultados anteriores. No incluya cálculos, únicamente resultados.

- a) Un cilindro vertical (eje de simetría eje z).
 - b) La superficie de Enneper.
 - c) El catenoide.
 - d) La superficie "rara".
 - e) Una silla de montar.
 - f) Un helicoides.
 - g) Una esfera.
 - h) Un cono.
 - i) Un toro.
 - j) Una pseudo-esfera (Superficie de revolución de una tractriz).
 - k) Superficie de revolución de $h(u) = e^u + \frac{1}{4}e^{-u}$
 - l) La superficie de Hennerberg.
 - m) La superficie de Catalán.
 - n) La superficie de Scherk.
 - ñ) Hiperboloide de un solo manto (hoja).
 - o) Hiperboloide de dos mantos (hojas)
 - p) Elipsoide.
2. Investigue qué es una superficie reglada. Lo puede encontrar en nuestro propio libro. Muestre que el helicoides y la silla de montar son una de ellas.
 3. Sea $X(u, v)$ una superficie paramétrica regular. Una superficie paralela a X es la superficie paramétrica:

$$Y(u, v) = X(u, v) + aN(u, v)$$

donde a es una constante.

- Halle la superficie paralela al helicoido con $a = 2$.
- Demuestre que en los puntos regulares de Y la curvatura de Gauss es:

$$K_Y = \frac{K}{1 - 2Ha + ka^2}$$

- Demuestre que en los puntos regulares de Y la curvatura de media es:

$$H_Y = \frac{H - Ka}{1 - 2Ha + ka^2}$$

4. En clase vimos el siguiente teorema: Si $M \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie compacta, entonces existe al menos un punto $p \in M$ tal que $K(p) > 0$. De las superficies dadas en el primer punto, muestre (exhiba) uno de estos puntos para las superficies donde es válido el teorema.
5. En el plano tangente a $M \subseteq \mathbb{R}^3$ en el punto p , T_pM podemos hacer lo siguiente: Hallar la curvatura normal es una dirección u y en esa misma dirección dibujar un punto que está sobre el plano tangente a una distancia igual a $r = \frac{1}{|\sqrt{K_u}|}$. El lugar geométrico de todos estos puntos en todas las direcciones se llama *indicatriz de curvatura* (*Indicatriz de Dupin*). En coordenadas xy de T_pM , halle la ecuación de la indicatriz de curvatura en término de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental. Qué representa esta curva en general?. Cuál es la indicatriz de curvatura para la esfera?, para un punto umbílico?