

La Braquistocrona

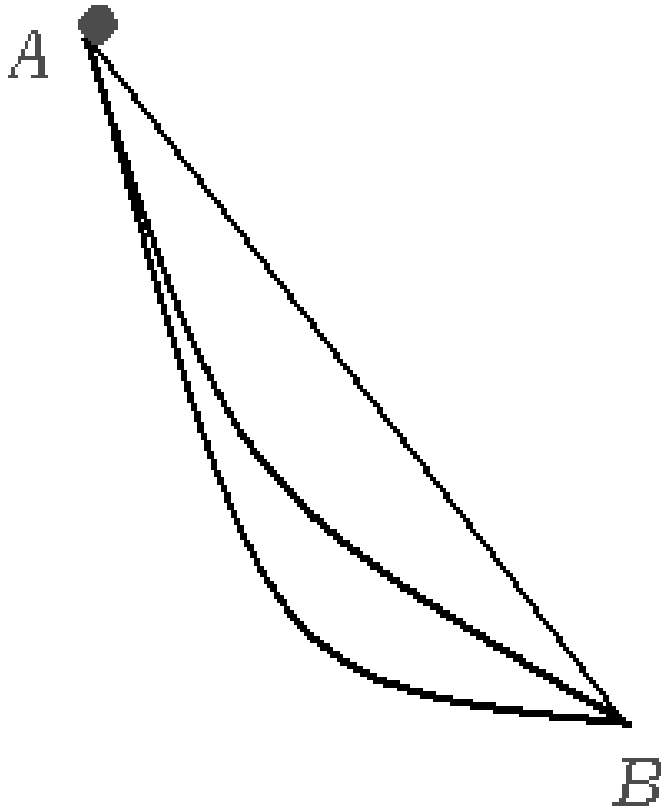
Feria de las Ciencias

José Ricardo Arteaga B.

Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes, Bogotá
jarteaga@uniandes.edu.co

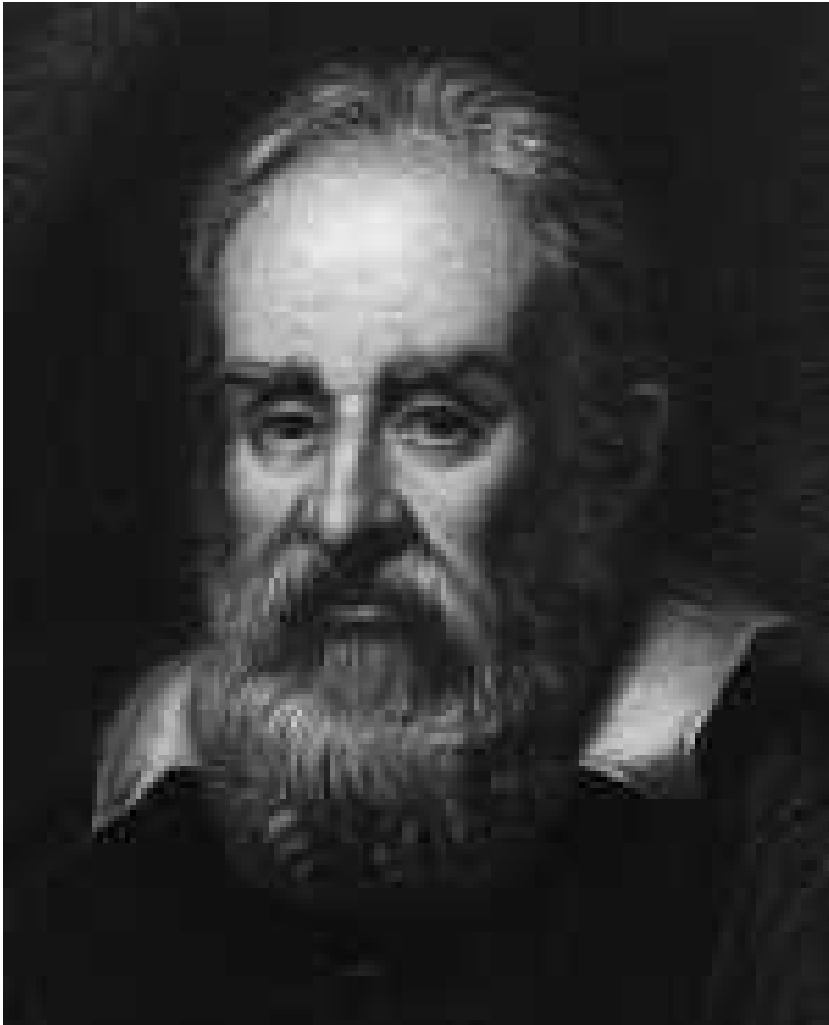
2005

Problema



- Imagine una trayectoria que une el punto A y el punto B , el cual está mas bajo que A y situada en el mismo plano vertical que contiene los puntos.
- Imagine una bola que se desliza, sin rozamiento, por la trayectoria desde A hasta B
- ¿Cómo debería ser la trayectoria para que la bola emplee el *menor tiempo* posible?.

Galileo Galilei, Italia (1564-1642)



- Galileo pensó que desciende más rápido por un camino circular.
- Está Usted de acuerdo con Galileo?
- Cuál sería el radio y dónde estaría su centro?

Johann Bernoulli, Suiza (1667-1748)



- Bernoulli en 1696 planteó un problema más general.
- Imaginemos un hilo en forma de curva arbitraria. ¿Qué curva *entre todas* las posibles lograría un descenso más rápido de la bola?.
- A este problema se le llamó el *problema de la braquistocrona*. (Griego: Brachístos = más corto, Chronos = tiempo)

Solución de Bernoulli

Pasos a seguir:

1. *Modelamiento del problema*, es decir definiendo variables, funciones etc., y usando ciertos principios escribir matemáticamente el problema. En este caso será una ecuación diferencial.
2. *Resolver dicha ecuación.*
3. *Construir dicha curva.*

Planteamiento de la ecuación diferencial

1. **Variables.** En el plano de la curva tomamos el sistema coordinado con el punto A en el origen, el eje y el eje vertical (positivo hacia abajo) y el eje x el eje horizontal (positivo a la derecha).
2. **Problema de óptica.** Con el *principio de Fermat del tiempo mínimo* se deducirá la *ley de Snell de la refracción* y pasando al límite una ley para un medio óptico estratificado.
3. **La ecuación de la Braquistocrona.** Por el *principio de conservación de energía*, y un poco de geometría, trigonometría y cálculo se obtiene la ecuación diferencial de primer orden asociada a la Braquistocrona.

$$y \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = c, \quad c = \text{const.} \quad (1)$$

La solución $y = y(x)$ es la función buscada.

Solución de la ecuación diferencial

Separando variables de (1)

$$dx = \left(\frac{y}{c-y} \right)^{1/2} dy \quad (2)$$

Introduciendo una nueva variable

$$\tan(\theta/2) = \left(\frac{y}{c-y} \right)^{1/2} \quad (3)$$

Despejando de (3) y diferenciando,

$$y = c \sin^2(\theta/2) \quad dy = c \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) d\theta \quad (4)$$