

Solución de Bernoulli

1. *Modelamiento del problema*, es decir definiendo variables, funciones etc., y usando ciertos principios escribir matemáticamente el problema. En este caso será una ecuación diferencial.
2. *Resolver dicha ecuación.*
3. *Construir dicha curva.*

Planteamiento de la ecuación diferencial

1. **Variables.** En el plano de la curva tomamos el sistema coordenado con el punto A en el origen, el eje y el eje vertical (positivo hacia abajo) y el eje x el eje horizontal (positivo a la derecha).
2. **Problema de óptica.** Con el [principio de Fermat del tiempo mínimo](#) se deduce la *ley de Snell de la refracción* y pasando al límite una ley para un medio óptico estratificado.
3. **La ecuación de la Baquistocrona.** Por el [principio de conservación de energía](#), y un poco de geometría, trigonometría y cálculo se obtiene la ecuación diferencial de primer orden asociada a la Baquistocrona.

$$y \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = c, \quad c = \text{const.} \quad (1)$$

La solución $y = y(x)$ es la función buscada.

Solución de la ecuación diferencial

Separamos variables de (1)

$$dx = \left(\frac{y}{c-y} \right)^{1/2} dy \quad (2)$$

Introducimos una nueva variable θ

$$\tan(\theta/2) = \left(\frac{y}{c-y} \right)^{1/2} \quad (3)$$

Despejamos de (3) y diferenciamos

$$\boxed{y = c \sin^2(\theta/2)} \quad dy = c \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) d\theta \quad (4)$$

Reemplazamos en (2)

$$dx = \tan(\theta/2) dy = c \sin^2(\theta/2) d\theta = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta) d\theta$$

Después de integrar tenemos

$$x = b(\theta - \sin \theta) \quad y = b(1 - \cos \theta) \quad (5)$$