Universidad de los Andes Departamento de Matemáticas

MATE 2410 Geometría Diferencial 1
Resumen de Teoremas y Fórmulas Importantes

Prof. José Ricardo ARTEAGA

---

1. Curvas

1. **Involuta** de una curva α
$$\mathcal{I}(t) = \alpha(t) - s(t)\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$$
donde $s(t) = \int_a^t |\alpha'(u)|du$

2. **Evoluta** de una curva α
$$\mathcal{E}(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$$

3. Curva **podaria** o curva pedal de una curva α respecto a un punto p.
$$\mathcal{P}(t) = p + [(\alpha(t) - p)\cdot N(t)]N(t)$$

4. Vector **tangente**:
$$T(s) = \beta'(s)$$
donde $\beta(s)$ es la **re-parametrización** de $\alpha(t)$ en términos de la longitud de arco, es decir despejando t en términos de s de la ecuación $s(t) = \int_a^t |\alpha'(u)|du$ y reemplazando en $\alpha(t)$.

5. **Curvatura** de una curva α
$$\kappa(s) = |T'(s)|$$

6. Vector **normal** principal
$$N(s) = \frac{1}{\kappa}T'(s)$$

7. Vector **binormal**:
$$B = T \times N$$

8. **Torsión** de una curva:
$$\tau = -N \cdot B'$$

9. Fórmulas de **Frenet**:
$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\nu & 0 \\ -\kappa\nu & 0 & \tau\nu \\ 0 & -\tau\nu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$
donde el primer grupo está dado en término de la longitud de arco s y el segundo en general, donde $\nu = |\alpha'(t)|$, es decir la rapidez de la partícula. La s derivadeas se hacen según el parámetro.

10. Otras fórmulas en términos de un parámetro normal (corriente)
$$T = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|} \qquad N = B \times T \quad \kappa = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} \qquad \tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'')\cdot \alpha'''}{|\alpha' \times \alpha''|^2}$$

11. Vector de **Darboux** ω.
$$T' = \omega \times T$$
$$N' = \omega \times N$$
$$B' = \omega \times B$$

2. Superficies

1. **Vector normal** unitario.

$$U = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$$

2. **Operador forma** S.

$$S_p(\mathbf{v}) = -\nabla_{\mathbf{v}} U \qquad S_p \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}$$

3. Coeficientes de la **Primera Forma Fundamental** ($[EFG]$)

$$E = X_u \cdot X_u, \quad F = X_u \cdot X_v, \quad G = X_v \cdot X_v \qquad [EFG] = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

La **métrica** de la superficie en $\mathbb{R}$ se escribe $ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$

4. Coeficientes de la **Segunda Forma Fundamental** ($[lmn]$)

$$l = U \cdot X_{uu}, \quad m = U \cdot X_{uv}, \quad n = U \cdot X_{vv} \qquad [lmn] = \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix}$$

donde $l = S_p(X_u) \cdot X_u = U \cdot X_{uu}$, $m = S_p(X_u) \cdot X_v = U \cdot X_{uv}$, y $l = S_p(X_v) \cdot X_v = U \cdot X_{vv}$. Para hallar los valores de a, b, c, d se usan las anteriores propiedades.

5. Relación entre el operador forma y las formas fundamentales ($[S][EFG] = [lmn]$):

$$\begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

3. Curvaturas

Curvaturas: Curvatura normal ($k(\mathbf{u}_p)$), Curvaturas principales (k_1 y k_2), Curvatura de Gauss (K) y Curvatura media (H).

$$k(\mathbf{u}_p) = S(\mathbf{u}_p) \cdot \mathbf{u}_p; \qquad K = \det(S) = k_1 k_2; \qquad H = \frac{1}{2}\mathtt{tr}(S) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

donde $\mathbf{u}_p \in T_pM$ es un vector tangente, y k_1 y k_2 son los valores propios de S. A los vectores propios de S se les llaman *direcciones principales*.
Lema (fuerte): Sea α una curva sobre una superficie regular $M \subset \mathbb{R}^3$, entonces
$\alpha'' \cdot U = S(\alpha') \cdot \alpha'$.
La *curvatura de Gauss* K y la *curvatura media* H en términos de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental están dadas por:

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} \qquad H = \frac{Gl + En - 2Fm}{2(EG - F^2)}$$

Superficies de revolución

Sea $X(u, v) = (g(u),\, h(u)\cos v,\, h(u)\sin v)$ una superficie de revolución, entonces los coeficientes de la **primera forma fundamental**, de la **segunda forma fundamental**, la **curvatura de Gauss** K y la **curvatura media** H están dados por:

$$\begin{array}{lll} E = g'^2 + h'^2 & F = 0 & G = h^2 \\ l = \dfrac{g''h' - h''g'}{\sqrt{g'^2 + h'^2}} & m = 0 & n = \dfrac{hg'}{\sqrt{g'^2 + h'^2}} \end{array}$$

$$K = \frac{g'(g''h' - h''g')}{h(g'^2 + h'^2)^2}$$

$$H = \frac{k_\mu + k_\pi}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{-h''}{(1+h'^2)^{3/2}} + \frac{1}{h(1+h'^2)^{1/2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-hh'' + 1 + h'^2}{h(1+h'^2)^{3/2}}\right)$$

Teorema 3.5.2 Una superficie que consiste solo de puntos umbílicos está contenida o en una esfera o en un plano.
Teorema 3.5.3 Sobre toda superficie compacta $M \subseteq \mathbb{R}^3$ hay al menos un punto p tal que $K(p) > 0$
Corolario 3.5.4 No existen superficies compactas en $\mathbb{R}^3$ con $K \leq 0$. En particular no es posible tener superficies mínimas inmersas uno a uno (embedding='embebidas') en $\mathbb{R}^3$ que sean compactas.
Teorema 3.5.5 (Liebermann) Si M es una superficie compacta con curvatura de Gauss constante K, entonces M es una esfera de radio $1/\sqrt{K}$.
Lema 3.5.6 (Hilbert) Si k_1 tiene un máximo en p, k_2 tiene un mínimo en p y $k_1(p) > k_2(p)$, entonces $K(p) \leq 0$
Teorema 3.5.7 Si una superficie de revolución M es mínima, entonces está contenida o en un plano o en un catenoide.

4. Superficies con H constante

Proposición 4.2.2 Sea $z = f(x, y)$ un función de dos variables. Si tomamos la parametrización de Monge para este gráfico, $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$, la superficie M es mínima si y solo si

$$f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_u f_v f_{uv} + f_{vv}(1 + fu^2) = 0$$

Además
$$H = \frac{f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_u f_v f_{uv} + f_{vv}(1 + fu^2)}{2(1 + fu^2 + f_v^2)^{3/2}}$$

Observación A la ecuación

$$f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_u f_v f_{uv} + f_{vv}(1 + fu^2) = 0$$

se le llama la ecuación de Euler-Lagrange, y puede ser obtenida optimizando el funcional de área. Las curvaturas medias de las superficies mínimas son entonces puntos críticos de este funcional.
Teorema 4.2.6 (Catalán) Toda superficie reglada mínima en $\mathbb{R}^3$ es parte de un plano o de una helicoide.
Teorema 4.3.4. Si M es una superficie que minimiza área, entonces M es una superficie mínima.
Teorema 4.4.4. Una pompa de jabón debe siempre tomar la forma de una superficie de curvatura media constante.
Teorema 4.4.5. (Ros) Sea M una superficie compacta embebida en $\mathbb{R}^3$, la cual acota un dominio D que tiene volumen Vol. Si $H > 0$, entonces
$$\int_M \frac{1}{|H|} dA \geq 3Vol.$$
La igualdad se satisface únicamente para la esfera estándar.
Teorema 4.4.6. (Alexandrov) Si M es una superficie embebida en $\mathbb{R}^3$ de curvatura media constante entonces M es la esfera estándar S^2.
Definición 4.5.1. Una función real $\phi(x, y)$ es armónica si todas las segundas derivadas son continuas en todos los puntos del dominio y además satisfacen la ecuación de Laplace $\nabla\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$
Teorema 4.5.3. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es una función de variable compleja analítica[1] , entonces u y v son armónicas.
Teorema 4.7.1. Coordenadas isotérmicas para una superficie $M \subseteq \mathbb{R}^3$ existen si y solo si M es mínima.
Teorema 4.8.2. Sea $X(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z}))$ una parametrización isotérmica de M y sea $\phi = \frac{\partial X}{\partial z}$. La superficie M es mínima si y solo si ϕ^i son holomorfas.

[1] Una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es *analítica u holomorfa*, es decir que $f'(z)$ exista en cada punto de una región D del plano complejo $\mathbb{C}$ si y solo si todas sus derivadas parciales de las funciones componentes existen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ y además satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Una función f se dice que es *meromorfa* si todas sus singularidades son polos. Toda función racional $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ con $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios es una función meromorfa.

Representaciones de Weierstrass-Enneper

El objetivo es usar las relaciones de funciones holomorfas y meromorfas para producir superficies Mínimas.

Definición 1. Si una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ compleja de variable compleja no es holomorfa (analítica) en z_0, pero si lo es en por lo menos un punto de toda vecindad de z_0 diremos que f tiene una *singularidad* en z_0, o que z_0 es es un *punto singular* de f.

Definición 2. Un punto z_0 singular de f se llama *polo*, si alrededor de cada vecindad de z_0 existe una *expansión de Laurent* (generalización de la expansión de Taylor en variable real) de la forma:

$$g(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j \qquad a_{-n} \neq 0$$

para algún n finito con coeficientes determinados por g.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Si $n = 1$ se denomina polo simple y si $n \neq 1$ se le llama polo de orden n. Los ejemplos más importantes de funciones meromorfas son las funciones racionales $f(z) = \mathcal{P}(z)/\mathcal{Q}(z)$ donde $\mathcal{P}(z)$ y $\mathcal{Q}(z)$ son funciones polinomiales.

Definición 3. Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ compleja de variable compleja, se llama *meromorfa* si todas sus singularidades son polos.

Definición 4.

$$e^z = e^u(\cos v + i \sin v) \qquad \log(z) = ln\sqrt{u^2+v^2} + i \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \tag{4.1}$$

$$\sin z = \tfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \tag{4.2}$$

$$\sinh z = \tfrac{e^{z}-e^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \tag{4.3}$$

Fórmulas

$$\sin z = \sin u \cosh v + i \cos u \sinh v \tag{4.4}$$

$$\cos z = \cos u \cosh v + i \sin u \sinh v \tag{4.5}$$

$$\sinh z = \sinh u \cos v + i \cosh u \sin v \tag{4.6}$$

$$\cosh z = \cosh u \cos v + i \sinh u \sin v \tag{4.7}$$

Representación I

Teorema 4.8.6. (Representación I de Weierstrass-Enneper). Si f es holomorfa sobre un dominio D, g es meromorfa sobre D y fg^2 es holomorfa sobre D, entonces una superficie mínima está definida por $X(z,\bar{z}) = (x^1(z,\bar{z}), x^2(z,\bar{z}), x^3(z,\bar{z}))$, donde

$$x^1(z,\bar{z}) = Re\int f(1-g^2)dz \qquad x^2(z,\bar{z}) = Re\int f(1+g^2)dz \qquad x^3(z,\bar{z}) = Re2\int fgdz$$

Representación II

Teorema 4.8.7. (Representación II de Weierstrass-Enneper). Para cualquier función holomorfa $F(\tau)$, una superficie mínima está definida por $X(z,\bar{z}) = (x^1(z,\bar{z}), x^2(z,\bar{z}), x^3(z,\bar{z}))$, donde

$$x^1(z,\bar{z}) = Re\int F(\tau)(1-\tau^2)dz \qquad x^2(z,\bar{z}) = Re\int F(\tau)(1+\tau^2)dz \qquad x^3(z,\bar{z}) = Re2\int F(\tau)\tau dz$$