MATE 2410 Geometría Diferencial - Sección: 1

Superficies y Fórmulas Importantes

Prof. José Ricardo ARTEAGA B.

---

1. **Cilindro** vertical.
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

2. **Catenoide**.
$$X(u,v)=[u,\cosh(u)\cos(v),\cosh(u)\sin(v)]$$

3. Superficie de **Enneper**.
$$X(u,v)=\left[u-\frac{1}{3}u^3+uv^2,v-\frac{1}{3}v^3+vu^2,u^2-v^2\right]$$
Para graficar puede tomar $-2\leq u,\quad v\leq 2$.

4. Superficie "**rara**"(buscaré el nombre si existe)
$$X(u,v)=\left[\frac{cu\pm\sin(u)\cosh(v)}{\sqrt{1-c^2}},\frac{v\pm\cos(u)\sinh(v)}{\sqrt{1-c^2}},\cos(u)\cosh(v)\right]$$
Para graficar puede tomar $-3\leq u,\quad v\leq 3$.

5. **Silla** de montar.
$$z=xy \qquad \textit{o también} \qquad z=x^2-y^2$$
Use parametrización de Monge, para hallar $X=X(u,v)$

6. **Toro**.
$$X(u,v)=[(R+r\cos u)\cos v,(R+r\cos u)\sin v,r\sin u]$$

7. **Vector normal** unitario.
$$U=\frac{X_u\times X_v}{|X_u\times X_v|}$$

8. **Operador forma** S.
$$S_p(\mathbf{v})=-\nabla_{\mathbf{v}}U \qquad S_p\begin{pmatrix}X_u\\X_v\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{pmatrix}X_u\\X_v\end{pmatrix}$$

9. Coeficientes de la **Primera Forma Fundamental** (EFG)
$$E=X_u\cdot X_u,\quad F=X_u\cdot X_v,\quad G=X_v\cdot X_v \qquad PFF=\begin{bmatrix}E&F\\F&G\end{bmatrix}$$
La **métrica** de la superficie en $\mathbb{R}$ se escribe $ds^2=Edx^2+2Fdxdy+Gdy^2$

10. Coeficientes de la **Segunda Forma Fundamental** (lmn)
$$l=U\cdot X_{uu},\quad m=U\cdot X_{uv},\quad n=U\cdot X_{vv} \qquad SFF=\begin{bmatrix}l&m\\m&n\end{bmatrix}$$
donde $l=S_p(X_u)\cdot X_u=U\cdot X_{uu}$, $m=S_p(X_u)\cdot X_v=U\cdot X_{uv}$, y $l=S_p(X_v)\cdot X_v=U\cdot X_{vv}$. Para hallar los valores de a,b,c,d se usan las anteriores propiedades.

11. Relación entre el operador forma y las formas fundamentales:

$$\begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

12. **Curvaturas**: Curvatura normal ($k(u)$), Curvaturas principales (k_1 y k_2), Curvatura de Gauss (K) y Curvatura media (H).

$$K = \det(S) = k_1 k_2 \qquad H = \frac{1}{2}\texttt{tr}(S) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

donde k_1 y k_2 son los valores propios de S. A los vectores propios de S se les llaman direcciones principales.