Superficies Mínimas

Sus Matemáticas y su Historia

José Ricardo Arteaga B.

Parametrización

- Superficie M en $\mathbb{R}^3$

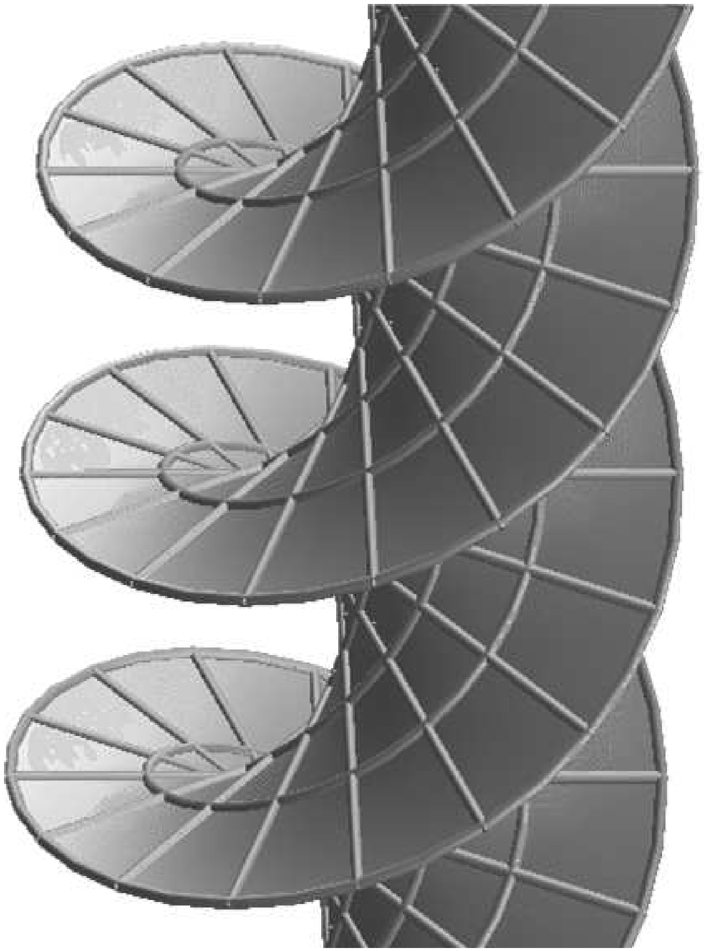
Parametrización

- Superficie M en $\mathbb{R}^3$
- 'Deformación' $X : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Parametrización

- Superficie M en $\mathbb{R}^3$
- 'Deformación' $X : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
- $X : (u, v) \longrightarrow (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$

Helicoide



$$X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$$

Helicoide

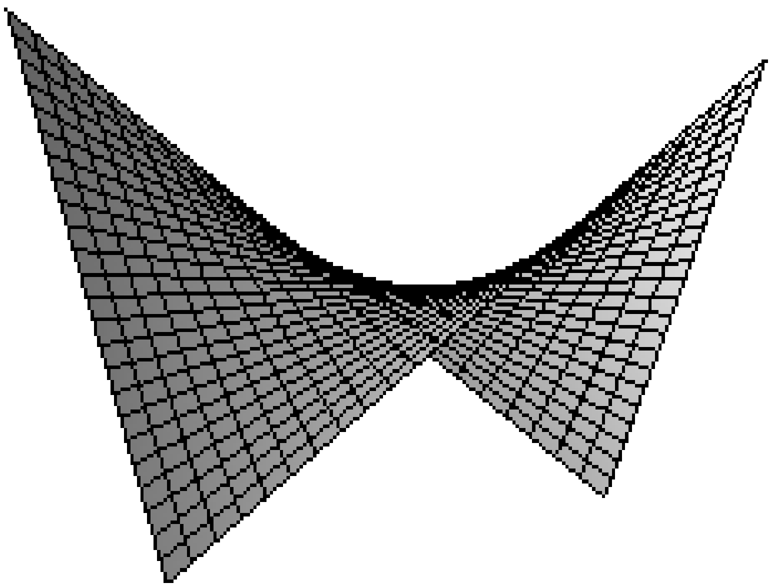
$$X^1(u,v) = u\cos v$$
$$X^2(u,v) = u\sin v$$
$$X^3(u,v) = v$$

Caso especial

- Superficie dada por la ecuación $z = f(x, y)$
- Parametrización de Monge $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$

Paraboloide hiperbólico

$$X(u,v) = (u, v, uv)$$



$$z = f(x,y) = xy$$

Primera Forma Fundamental

- $I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$
- $E = X_u \cdot X_u$
- $F = X_u \cdot X_v$
- $G = X_v \cdot X_v$

Segunda Forma Fundamental

- $II = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$

- $l = X_{uu} \cdot U = X_{uu} \cdot X_u \times X_v / |X_u \times X_v|$
- $m = X_{uv} \cdot U = X_{uv} \cdot X_u \times X_v / |X_u \times X_v|$
- $n = X_{vv} \cdot U = X_{vv} \cdot X_u \times X_v / |X_u \times X_v|$

Operador Forma

- $S = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

- $S = (II)(I)^{-1}$

Propiedades del Operador Forma

- Es una transformación lineal $S : T_P M \longrightarrow T_P M$
  $S(\mathbf{v}) = \mathbf{w} = \alpha X_u + \beta X_v$

Propiedades del Operador Forma

- Es una transformación lineal $S : T_P M \longrightarrow T_P M$
  $S(\mathbf{v}) = \mathbf{w} = \alpha X_u + \beta X_v$
- Es simétrica, es decir $S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot S(\mathbf{w})$

Propiedades del Operador Forma

- Es una transformación lineal $S : T_P M \longrightarrow T_P M$
  $S(\mathbf{v}) = \mathbf{w} = \alpha X_u + \beta X_v$
- Es simétrica, es decir $S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot S(\mathbf{w})$
- Tiene valores propios reales, y es diagonalizable.

Propiedades del Operador Forma

- Es una transformación lineal $S : T_P M \longrightarrow T_P M$
  $S(\mathbf{v}) = \mathbf{w} = \alpha X_u + \beta X_v$
- Es simétrica, es decir $S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot S(\mathbf{w})$
- Tiene valores propios reales, y es diagonalizable.
- $S = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$

Curvatura de Gauss

$$K = k_1 k_2$$

Curvatura Media

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Ecuaciones Importantes

- La ecuación general que caracteriza las superficies mínimas, una vez se conoce su parametrización es:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0 \tag{1}$$

- Si $z = f(x, y)$ es una función suave, entonces para saber si es una superficie mínima, es verificar si satisface la ecuación de *Euler-Lagrange*:

$$f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_u f_v f_{uv} + f_{vv}(1 + fu^2) = 0 \tag{2}$$

Búsqueda de Superficies Mínimas

- Hallar soluciones a la ecuación de Euler-Lagrange, dado que esta ecuación es una condición necesaria y suficiente.
- Usar las representaciones de Weierstrass-Enneper I y II

$$x^1(z,\bar{z}) = Re\int f(1-g^2)dz$$
$$x^2(z,\bar{z}) = Re\int if(1+g^2)dz$$
$$x^3(z,\bar{z}) = Re2\int fgdz$$

$$x^1(z,\bar{z}) = Re\int F(\tau)(1-\tau^2)dz$$
$$x^2(z,\bar{z}) = Re\int iF(\tau)(1+\tau^2)dz$$
$$x^3(z,\bar{z}) = Re2\int F(\tau)\tau dz$$

Caracterización Superficies Mínimas

- *Curvatura Media*.

$$H = 0$$

Caracterización Superficies Mínimas

- *Curvatura Media*.

$$H = 0$$

- *Curvatura de Gauss*

$$K \leq 0$$

Caracterización Superficies Mínimas

- *Curvatura Media*.

$$H = 0$$

- *Curvatura de Gauss*

$$K \leq 0$$

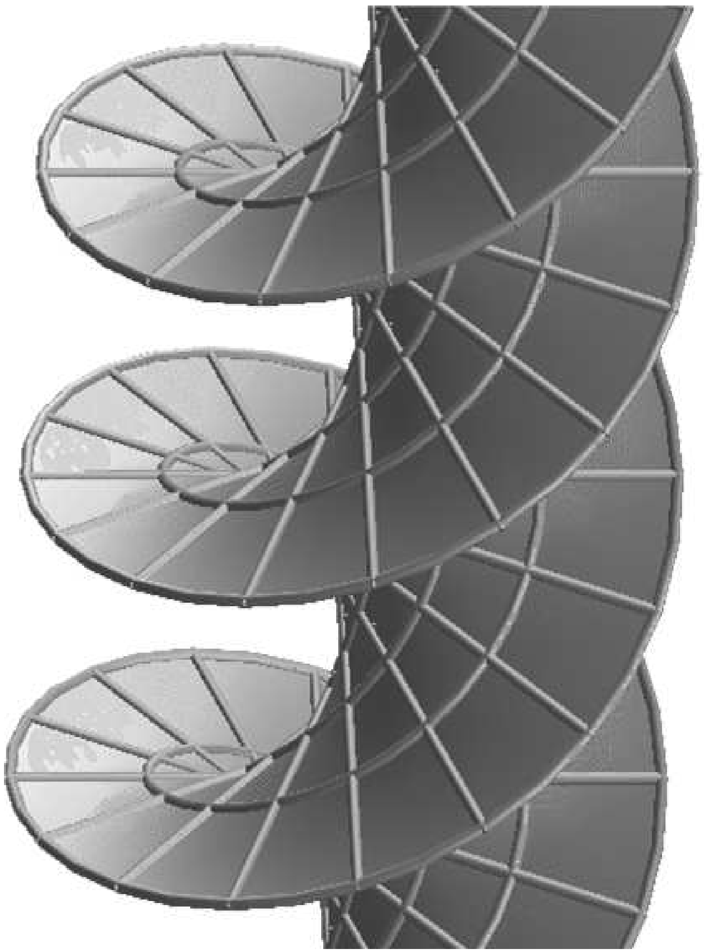
- Curvaturas principales

$$k_1 \qquad k_2$$

son ambas cero o difieren sólo en signo.

Helicoide

$$X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$$



$$K = -\frac{1}{(1+u^2)^2}$$

$$H = 0$$

Catenoide

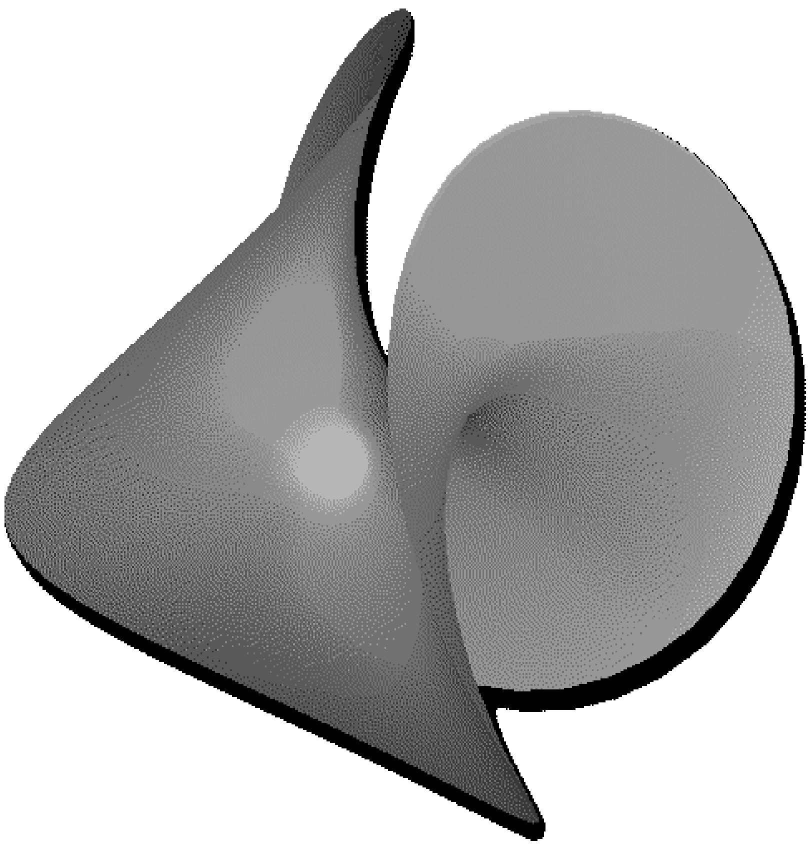
$$X(u,v) = (u, \cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v))$$

$$K = -\frac{1}{\cosh^4 u}$$

$$H = 0$$

Superficie de Enneper

$$X(u,v) = \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, u^2 - v^2\right)$$

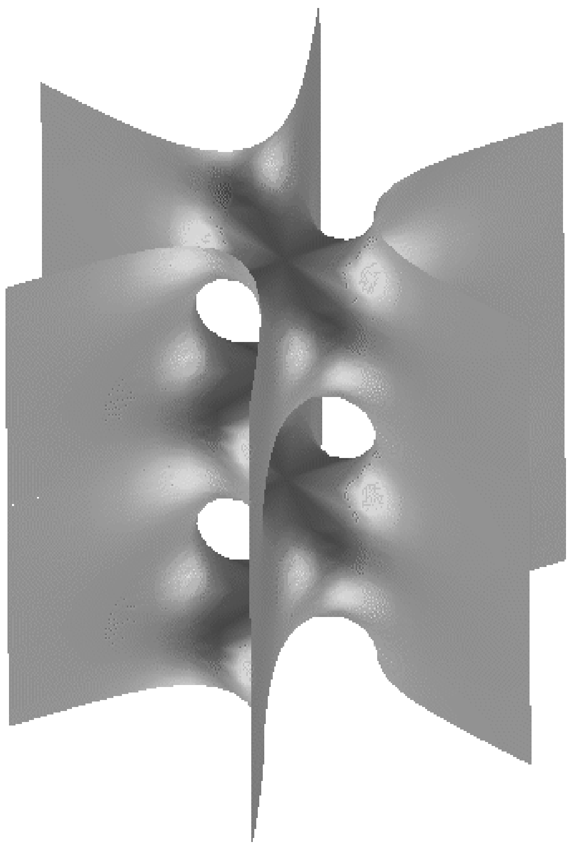


$$K = -\frac{4}{(1+u^2+v^2)^4}$$

$$H = 0$$

Superficie de Scherk

$$X(u,v) = \left(u, v, \ln\left(\frac{\cos u}{\cos v}\right)\right)$$



$$K = -\frac{4}{(1+u^2+v^2)^4}$$

$$H = 0$$

Superficie de Riemann

$$F(z) = t\frac{z^2+3}{z^2-1}$$

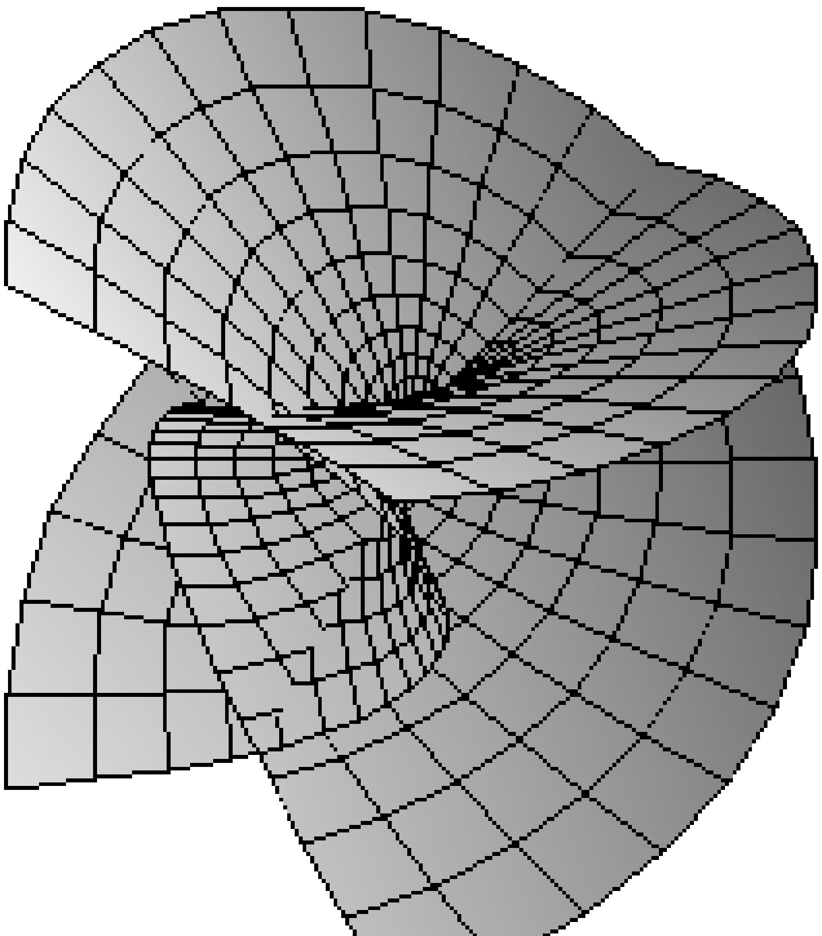
$$H = 0$$

Superficie de Schwarz

$$H = 0$$

Superficie de Catalan

$$X(u,v) = (u - \sin u \cosh v, 1 - \cos u \cosh v, 4\sin(u/2)\sinh(v/2))$$



$$K = -\frac{\sec h^4(v/2)}{8(\cos u - \cosh v)}$$

$$H = 0$$

Breve historia

- 1744. Leonard Euler (1707-1783), Suiza. Helicoide.

Breve historia

- 1744. Leonard Euler (1707-1783), Suiza. Helicoide.
- 1762. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Francia. En su memoria "*Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et minima des formules intégrales indefinies*" desarrolló un algoritmo para el cálculo de variaciones que dio lugar a la ecuación diferencial de Euler-Lagrange:

$$(1 + f_y^2) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy} = 0$$

Breve historia

- 1744. Leonard Euler (1707-1783), Suiza. Helicoide.
- 1762. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Francia. En su memoria "*Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et minima des formules intégrales indefinies*" desarrolló un algoritmo para el cálculo de variaciones que dio lugar a la ecuación diferencial de Euler-Lagrange:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0$$

- 1776. Jean Baptiste Meusnier (1754-1793), Francia. Catenoide. Por sugerencia de Sophie Germain le llamó a esa cantidad geométrica asociada a la forma en que se curvaba la superficie en el espacio, y que satisfacía la ecuación de Euler Lagrange, *Curvatura Media*H.

Breve historia

- 1744. Leonard Euler (1707-1783), Suiza. Helicoide.
- 1762. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Francia. En su memoria "*Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et minima des formules intégrales indefinies*" desarrolló un algoritmo para el cálculo de variaciones que dio lugar a la ecuación diferencial de Euler-Lagrange:

$$(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy} = 0$$

- 1776. Jean Baptiste Meusnier (1754-1793), Francia. Catenoide. Por sugerencia de Sophie Germain le llamó a esa cantidad geométrica asociada a la forma en que se curvaba la superficie en el espacio, y que satisfacía la ecuación de Euler Lagrange, *Curvatura Media* H.
- 1784-1787. G. Monge, A. Legendre, S.F. Lacroix y A.M. Ampère encontraron soluciones a la ecuación de Lagrange.

Historia - Continuación

- 1835. Heinrich Ferdinand Scherk (1798-1885), Alemania. Encontró cinco nuevas superficies mínimas usando la representación de Monge-Legendre. La idea fundamental fue usar técnicas de separación de variables.

Historia - Continuación

- 1835. Heinrich Ferdinand Scherk (1798-1885), Alemania. Encontró cinco nuevas superficies mínimas usando la representación de Monge-Legendre. La idea fundamental fue usar técnicas de separación de variables.
- 1842. Antoine Ferdinand Plateau (1801-1883), Bélgica: **Problema de Plateau:** "*Existencia o no existencia de superficies minimales en $\mathbb{R}^3$ con frontera prefijada*". Fue uno de los problemas del siglo XX planteados por Hilbert.

Historia - Continuación

- 1835. Heinrich Ferdinand Scherk (1798-1885), Alemania. Encontró cinco nuevas superficies mínimas usando la representación de Monge-Legendre. La idea fundamental fue usar técnicas de separación de variables.
- 1842. Antoine Ferdinand Plateau (1801-1883), Bélgica: **Problema de Plateau:** "*Existencia o no existencia de superficies minimales en* $\mathbb{R}^3$ *con frontera prefijada*". Fue uno de los problemas del siglo XX planteados por Hilbert.
- 1843. Eugène Charles Catalan (1814-1894), Bélgica. Probó que el Helicoide es la única superficie reglada diferente del plano.

Historia - Continuación

- 1835. Heinrich Ferdinand Scherk (1798-1885), Alemania. Encontró cinco nuevas superficies mínimas usando la representación de Monge-Legendre. La idea fundamental fue usar técnicas de separación de variables.
- 1842. Antoine Ferdinand Plateau (1801-1883), Bélgica: **Problema de Plateau:** "*Existencia o no existencia de superficies minimales en* $\mathbb{R}^3$ *con frontera prefijada*". Fue uno de los problemas del siglo XX planteados por Hilbert.
- 1843. Eugène Charles Catalan (1814-1894), Bélgica. Probó que el Helicoide es la única superficie reglada diferente del plano.
- 1864. A. Enneper.

Historia - Continuación

- 1835. Heinrich Ferdinand Scherk (1798-1885), Alemania. Encontró cinco nuevas superficies mínimas usando la representación de Monge-Legendre. La idea fundamental fue usar técnicas de separación de variables.
- 1842. Antoine Ferdinand Plateau (1801-1883), Bélgica: **Problema de Plateau:** "*Existencia o no existencia de superficies minimales en $\mathbb{R}^3$ con frontera prefijada*". Fue uno de los problemas del siglo XX planteados por Hilbert.
- 1843. Eugène Charles Catalan (1814-1894), Bélgica. Probó que el Helicoide es la única superficie reglada diferente del plano.
- 1864. A. Enneper.
- 1865. H.A. Schwarz. (1843-1921), Alemania. La teoría de superficies minimales sufrió un gran impulso por los´nuevos métodos para resolver el problema de Plateau planteados por Schwarz con borde un cuadrilátero prefijado. Estos trabajos están basados en las representaciones de Weierstrass.

Historia - Continuación

- 1835. Heinrich Ferdinand Scherk (1798-1885), Alemania. Encontró cinco nuevas superficies mínimas usando la representación de Monge-Legendre. La idea fundamental fue usar técnicas de separación de variables.
- 1842. Antoine Ferdinand Plateau (1801-1883), Bélgica: **Problema de Plateau:** "*Existencia o no existencia de superficies minimales en* $\mathbb{R}^3$ *con frontera prefijada*". Fue uno de los problemas del siglo XX planteados por Hilbert.
- 1843. Eugène Charles Catalan (1814-1894), Bélgica. Probó que el Helicoide es la única superficie reglada diferente del plano.
- 1864. A. Enneper.
- 1865. H.A. Schwarz. (1843-1921), Alemania. La teoría de superficies minimales sufrió un gran impulso por los´nuevos métodos para resolver el problema de Plateau planteados por Schwarz con borde un cuadrilátero prefijado. Estos trabajos están basados en las representaciones de Weierstrass.
- 1868. G.F.B. Riemann (1826-1866), Alemania.

Historia - Continuación

- Con los trabajos de K. Weierstrass (1861), J. Weingarten (1863), B. Riemann (1866), A. Paterson (1866) y E. Beltrami (1868), en cuanto a nuevos métodos y nuevas representaciones surgen nuevas posibilidades para resolver el problema de Plateau usando la teoría de variable compleja, funciones analíticas, funciones armónicas.

Historia - Continuación

- Con los trabajos de K. Weierstrass (1861), J. Weingarten (1863), B. Riemann (1866), A. Paterson (1866) y E. Beltrami (1868), en cuanto a nuevos métodos y nuevas representaciones surgen nuevas posibilidades para resolver el problema de Plateau usando la teoría de variable compleja, funciones analíticas, funciones armónicas.
- 1927. Harr. Prueba la existencia de la solución al problema de Plateau.

Historia - Continuación

- Con los trabajos de K. Weierstrass (1861), J. Weingarten (1863), B. Riemann (1866), A. Paterson (1866) y E. Beltrami (1868), en cuanto a nuevos métodos y nuevas representaciones surgen nuevas posibilidades para resolver el problema de Plateau usando la teoría de variable compleja, funciones analíticas, funciones armónicas.
- 1927. Harr. Prueba la existencia de la solución al problema de Plateau.
- 1927 T.Rado.Prueba la regularidad y minimalidad de la solución.

Historia - Continuación

- Con los trabajos de K. Weierstrass (1861), J. Weingarten (1863), B. Riemann (1866), A. Paterson (1866) y E. Beltrami (1868), en cuanto a nuevos métodos y nuevas representaciones surgen nuevas posibilidades para resolver el problema de Plateau usando la teoría de variable compleja, funciones analíticas, funciones armónicas.
- 1927. Harr. Prueba la existencia de la solución al problema de Plateau.
- 1927 T.Rado.Prueba la regularidad y minimalidad de la solución.
- 1930. **Solución Problema de Plateau:** Jesse Douglas (1897-1965), EEUU, y Tibor Rado (1895-1965), Hungría.

Historia - Continuación

- Con los trabajos de K. Weierstrass (1861), J. Weingarten (1863), B. Riemann (1866), A. Paterson (1866) y E. Beltrami (1868), en cuanto a nuevos métodos y nuevas representaciones surgen nuevas posibilidades para resolver el problema de Plateau usando la teoría de variable compleja, funciones analíticas, funciones armónicas.
- 1927. Harr. Prueba la existencia de la solución al problema de Plateau.
- 1927 T.Rado.Prueba la regularidad y minimalidad de la solución.
- 1930. **Solución Problema de Plateau:** Jesse Douglas (1897-1965), EEUU, y Tibor Rado (1895-1965), Hungría.
- 1970. A.H. Schoen

Historia - Continuación

- Con los trabajos de K. Weierstrass (1861), J. Weingarten (1863), B. Riemann (1866), A. Paterson (1866) y E. Beltrami (1868), en cuanto a nuevos métodos y nuevas representaciones surgen nuevas posibilidades para resolver el problema de Plateau usando la teoría de variable compleja, funciones analíticas, funciones armónicas.
- 1927. Harr. Prueba la existencia de la solución al problema de Plateau.
- 1927 T.Rado.Prueba la regularidad y minimalidad de la solución.
- 1930. **Solución Problema de Plateau:** Jesse Douglas (1897-1965), EEUU, y Tibor Rado (1895-1965), Hungría.
- 1970. A.H. Schoen
- 1981. C.C. Chen, Gackstatter

Historia - Continuación

- Con los trabajos de K. Weierstrass (1861), J. Weingarten (1863), B. Riemann (1866), A. Paterson (1866) y E. Beltrami (1868), en cuanto a nuevos métodos y nuevas representaciones surgen nuevas posibilidades para resolver el problema de Plateau usando la teoría de variable compleja, funciones analíticas, funciones armónicas.
- 1927. Harr. Prueba la existencia de la solución al problema de Plateau.
- 1927 T.Rado.Prueba la regularidad y minimalidad de la solución.
- 1930. **Solución Problema de Plateau:** Jesse Douglas (1897-1965), EEUU, y Tibor Rado (1895-1965), Hungría.
- 1970. A.H. Schoen
- 1981. C.C. Chen, Gackstatter
- 1982. C. Costa, D. Hoffmann, W.H. Meeks

Tiempos Modernos

- En los últimos 30 años el interés está en estudiar superficies que creciendo su frontera, se extienden indefinidamente en el espacio, es decir en *superficies minimales completas*.
- Las escuelas de Geómetras que trabajan en este sentido son las de R. Osserman, A. Ros, A.V. Pogorelov, W.H. Meeks, y R. Schoen entre otras.

Recomendados - Internet

Algunas fotos que se mostraron fueron obtenidas de estos sitios.

- http://vmm.math.uci.edu/3D-XplorMath/Surface/gallery.html
- http://www.ugr.es/ surfaces/
- http://math.cl.uh.edu/ gray/Gifminsurfs/minsurf.html
- http://www.indiana.edu/ minimal/toc.html
- http://www.zib.de/polthier/booklet/intro.html
- http://www.msri.org/about/sgp/jim/geom/minimal/main.html

Referencias

- John Oprea, Differential Geometry and Its Applications, Second Edition, Cleveland State University. Prentice Hall 2004.
- Carmo Manfredo Perdigao Do, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1976