MATE-2410 — Geometría Diferencial 1

Taller 1

Superficies con Curvatura Media Constante

Teorema 1 Sean M una superficie suave orientable e inmersa[1] en $\mathbb{R}^3$ y M^t una 'leve' perturbación de M[2].

Si M está parametrizada mediante $X(u,v)$, entonces

$$Y(u,v) = X(u,v) + tV(u,v)$$

es una parametrización de M^t, donde V es algún campo vectorial en $\mathbb{R}^3$. Si M es compacta (cerrada y acotada) entonces:

$$A'(0) = -\int\int_M 2HU \cdot V dA \tag{1}$$

donde A es el área de M, $A(t)$ es el área de M^t y $A'(0)$ es la derivada de $A(t)$ respecto a t en $t = 0$. H la *curvatura media*[3] de M y U el vector normal unitario de M.

Prueba La prueba la haremos en tres pasos.

1. $Y_u =$

   $Y_v =$

   $Y_u \times Y_v =$

   $|Y_u \times Y_v| =$

   entonces

   $A(t) \approx \int\int_{M^t} \sqrt{|X_u \times X_v|^2 + 2t(X_u \times X_v)(X_u \times V_v + V_u \times X_v)} dudv$

   Ahora calcule

   $A'(t) = \int\int_{M^t}$ ____ $dudv$

   y evalúe en $t = 0$.

   $A'(t) = \int\int_{M^t} V \cdot U \times X u dudv$

   Pruebe que se llega a

   $$A'(0) = \int\int_{M^t} U \cdot (X_u \times V_v + V_u \times X_v) dudv \tag{2}$$

2. Escriba el Teorema de Green[4] para $P = -V \cdot U \times X_v$ y $Q = V \cdot U \times X_u$

   $\frac{\partial P}{\partial u} =$

---

[1] Para todo punto $P \in M$ la aplicación $df : T_P M \to T_{f(P)}\mathbb{R}^3$ es inyectiva, donde $f : M \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación suave.

[2] Los términos en t de grado ≥ 2 se despreciarán.

[3] $S(X_u) \times X_v - S(X_v) \times X_u = 2HX_u \times X_v$, donde S es el operador forma $S(X_u) = -\nabla_{X_u} U = U_u$

[4] $\oint_C -Qdx + Pdy = \int\int_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} dxdy$

$\frac{\partial Q}{\partial v} =$

$\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} =$

Pruebe que se obtiene

$$\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} = V_v \cdot U \times X_u - V_u \cdot U \times X_v + V \cdot U_v \times X_u - V \cdot U_u \times X_v \tag{3}$$

Ahora use la nota de pié de página para mostrar que

$U_u \times V_v + X_u \times U_v = 2HX_u \times X_v$

Reemplazando este resultado en (2) y en el teorema de Green se obtiene:

$$\begin{aligned} &\int\int_D V_v \cdot U \times X_u - V_u \cdot U \times X_v dudv + \int\int_D V \cdot (2HX_u \times X_v) dudv && (4)\\ &= \oint_C V \cdot U \times X_u du + V \cdot U \times X_v dv && (5) \end{aligned}$$

3. La expresión (4) obtenida anteriormente son cálculos para dos campos escalares P y Q definidos 'apriori'. Ahora relacionaremos este resultado con las condiciones del teorema.

   a) En el teorema de Green la región D es una región ________________ y la curva C es su ________________

   b) Si tomamos una 'triangulación' de una 'carta' de la parametrización escogida (patch) ($X : D \subseteq R^2 \to \mathbb{R}^3$, entonces la existencia de U está garantizada por (Escriba cuál de las hipótesis del Teorema)________________ ya que $X_u \times X_v$________________

   c) La aplicación X es un ________________ por (Escriba cuál de las hipótesis del Teorema)________________

   d) Por lo tanto las integrales de línea sobre las curvas interiores en la triangulación de X se anulan por (Escriba cuál de las hipótesis del Teorema)________________

   e) Como M es cerrada por (Escriba cuál de las hipótesis del Teorema)________ entonces cuando integramos sobre toda la colección de cartas que cubren a M todas las integrales de línea se cancelan, porque M es (Escriba cuál de las hipótesis del Teorema)________________. Para este razonamiento piense sobre una colección de cartas con cierta triangulación sobre una banda de un cilindro y observe que le sucede a la suma de integrales de línea.

   f) Entonces el teorema queda demostrado porque (Escriba cómo conecta los resultados anteriores.)________________

El siguiente es el ejercicio 4.4.2 planteado en el libro guía (pág. 188)

Teorema 2 Sean M una superficie suave orientable e inmersa en $\mathbb{R}^3$ y M^t una 'leve' perturbación de M.

Si M es limitada por una curva C, entonces

$$A'(0) = -\int\int_M 2HU \cdot V dA - \oint_C V \cdot (U \times T) \tag{6}$$

Prueba.

1. La parametrización de M es $X = X(u, v)$, de modo que una base del plano tangente $T_P(M)$ es $\{X_u, X_v\}$. Si la curva C, en el borde de M, está parametrizada por $\alpha(s) = (u(s), v(s))$ por la regla de la cadena $T = \frac{\partial X}{\partial s} = X_u u' + X_v v'$ es un vector tangente a M en P.

   Por lo tanto

   $U \times T =$______________________________

   expandiendo

   $U \times T =$______________________________

   y obtenemos

   $$V \cdot U \times T ds = \tag{7}$$

2. Reemplazando la expresión (7) en el teorema de Green (4) aplicado para los campos P y Q definidos en la demostración anterior obtenemos:

   (Escriba el resultado)

   Ahora reemplazando (2) en este resultado tenemos

   (Escriba el resultado)

Consecuencias

Teorema 3. Una pompa de jabón siempre debe tener la forma de una superficie con curvatura media constante.

Observaciones. Si V es paralelo a U debido a las presiones, en caso particular si $U = V$ por el teorema 1, tenemos que $A'(0) = 2A$, puesto que $U \cdot V = 1$ y H es constante. Este análisis es similar si pensamos que $V(u, v) = X(u, v)$, lo cual tendríamos que $Y^t = (1+t)X$ y por tanto $A(t) = (1 + t)^2 A$ y $A'(0) = 2A$.

Teorema 4. (Teorema de Ros) Sea M una superficie compacta embebida[5] en $\mathbb{R}^3$ que encierra un sólido con un volumen Vol, entonces:

$$\int_M \frac{1}{|H|} dA \geq 3Vol. \tag{8}$$

La igualdad es válida si M es una esfera.

Teorema 5. (Teorema de Alexandrov) Sea M una superficie compacta embebida en $\mathbb{R}^3$ que encierra un sólido con un volumen Vol y tiene curvatura media H constante, entonces M es la esfera estándar.

[5] Embebida (Embeding) es una inmersión en la cual f es inyectiva, es decir es una inmersión inyectiva, lo cual implica que no admite auto-intersecciones.