MATE-2410 — Geometría Diferencial 1
Taller 2

Superficies con H constante y Variable Compleja

Funciones armónicas y Funciones holomorfas

Definición 1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja de variable compleja, la *derivada compleja* se define como,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Definición 2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja de variable compleja $z = (x + iy) \mapsto f(z) = u + iv$. Las *ecuaciones de Cauchy-Riemann* (ECR) son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1}$$

Teorema 1. Si u y v son de clase $C^1(D)$ (con primeras derivadas continuas en algún dominio $D \ni z_0$), entonces las Ecuaciones de Cauchy Riemann (ECR) son condición necesaria y suficiente para que $f'(z_0)$ exista.

Definición 3. Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ compleja de variable compleja se llama *analítica u holomorfa* en z_0 no solo si existe $f'(z_0)$ sino además existe la derivada en todo punto de alguna vecindad de z_0. Una función f es analítica en un dominio D si es analítica en todo punto de ese dominio, y escribimos $f \in C^\omega(D)$

Definición 4. Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ compleja de variable compleja se llama *entera* si es analítica en todo el plano complejo.

Definición 5. Una función $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto u = u(x, y)$ se llama *armónica* si satisface la ecuación de Laplace, es decir $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$

Teorema 2. Si $f = u + iv$ es una función analítica en D, $f \in C^\omega(D)$, D un dominio simplemente conexo, entonces u y v son funciones armónicas en D.

Teorema 3. Si u es armónica en D, existe v (conjugada armónica), tal que $f(z) = u + iv$ es holomorfa.

Ejercicios 1

1. Probar que $f(z) = f(x + iy) = x^2 + iy^2$ no es analítica.
2. Sea $f(z) = z^n$,
   a) Para $n = 2$ hallar u y v.
   b) Pruebe que u y v son armónicas.
   c) Pruebe que $f(z) = z^2$ es entera.
   d) Para $n = 3$ hallar u y v.
   e) Pruebe que u y v son armónicas.
   f) Pruebe que $f(z) = z^3$ es entera.

3. Considere la superficie $u(x,y) = x^2 - y^2$ y la parametrización de Monge $X(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$, pruebe que la curvatura media

$$H = \frac{4(v^2 - u^2)}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{3/2}} \tag{2}$$

Observación. *Claramente $H \neq 0$. En general las superficies mínimas no son gráficos de funciones armónicas.*

Funciones armónicas y Superficies mínimas (Parte 1)

Definición 6. Sea M una superficie regular y $X(u,v)$ una parametrización, decimos que X es *isotermal* si los coeficientes de la primera forma fundamental (I) satisfacen que: $E = G$ y $F = 0$

Teorema 4. Si X es isotermal, entonces $\Delta X = X_{uu} + X_{vv} = 2EHU$

Teorema 5. Sea M una superficie regular con coordenadas isotermales $X(u,v) = (x^1(u,v), x^2(u,v), x^3(u,v))$, M es una superficie mínima si y solo si x^i son armónicas.

Ejercicios 2

1. Demostrar el Teorema 4. (**Ayuda:** *Use las Fórmulas Fundamentales de la Aceleración (pág. 136) y la definición de H*).

2. Demostrar el Teorema 5.

3. Porqué $f(x,y) = x^2 - y^2$, usando la parametrización de Monge, no es mínima siendo x^i armónicas?. No contradice este hecho el Teorema 4?. Explique.

Funciones armónicas y Superficies mínimas (Parte 2)

Definición 6. Sea $z = x + iy$ un punto en $D \subseteq \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, cambiaremos $x = u$ y $y = v$ para expresar $z = u + iv$. Sea X es una parametrización de una superficie regular M en D, puesto que $u = \frac{z+\overline{z}}{2}$ y $v = \frac{z-\overline{z}}{2i}$, definimos $\phi = \frac{\partial X}{\partial z} = (x_z^1, x_z^2 x_z^3)$ donde , $X(u,v) = (x^1(u,v), x^2(u,v), x^3(u,v))$.

Teorema 6. Si X es una parametrización isotermal de una superficie regular M $f(z)$, entonces $\phi^2 = 0$

Teorema 7. Sea M una superficie regular parametrizada en coordenadas isotermales $(\phi^2 = 0)$[1], entonces M es mínima si y solo si las componentes ϕ^i son funciones holomorfas.

Teorema 8 (Osserman). Coordenadas isotermales existen para cualquier superficie mínima $M \subseteq \mathbb{R}^3$

Ejercicios 3

1. Probar que $u = \frac{z+\overline{z}}{2}$

2. Probar que $v = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

3. Probar que $\phi^2 = \frac{1}{4}(E - G - 2iF)$

4. Demostrar el Teorema 6.

[1] $\phi^2 = \phi \cdot \phi$