Levantamiento de Wagner de una Métrica de Riemann

Mikhail Malakhaltsev
Mikhail.Malakhaltsev@ksu.ru
José Ricardo Arteaga B.
jarteaga@uniandes.edu.co

Kazan State University
Universidad de los Andes

Taller en Geometría, Control y Aplicaciones
Bogotá, Diciembre 09 - 11 de 2008

Contenido

Sistema masa-resorte-amortiguador

Figura: Resorte

$$\ddot{w}(t) + \gamma \dot{w}(t) + k w(t) = 0$$

$$w = x; \quad \dot{w} = y; \quad \gamma = u$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -kx \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{x} = E_0 + uE_1}$$

El monociclo

Figura: Monociclo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1 \cos(z), \\ \dot{y} &= u_1 \sin(z), \\ \dot{z} &= u_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} \cos(z) \\ \sin(z) \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{x} = u_1 E_1 + u_2 E_2}$$

Sistemas de Control

Un sistema de control es una EDO de la forma

$$\boxed{\dot{x} = f(x, u)}$$

donde:

1. $x \in M$ es el estado del sistema,
2. M es el espacio de estados,
3. $u \in U(x)$ es la entrada o control,
4. $U(x)$ es el conjunto de entradas,
5. $f(x, u)$ es una función suave llamada la aplicación del sistema,
6. $f(x, u)$ es un campo vectorial para $u \in U$ fijo.

Sistemas Afines

Definición

Un sistema de control se llama afín si se puede escribir de la forma:

$$\boxed{\dot{x} = E_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i E_i(x)} \tag{1}$$

donde $E_0, E_1, \ldots, E_m$ *son campos vectoriales sobre* M.

Contenido

Distribuciones sobre una Variedad

Definición

Sea M una variedad suave n-dimensional. Una distribución m-dimensional ($m < n$) Δ sobre M es un campo suave de espacios m-dimensionales $\Delta(x) \subset T_xM$, es decir, para todo $x \in M$ existe una vecindad $V(x)$ y un campo de vectores $E_1, \dots, E_m \in \mathfrak{X}(V)$, tal que para cada $x \in V(x)$,

$$\Delta(x) = span\{E_1, \dots, E_m\}$$

Definición

Una distribución Δ se dice que es totalmente integrable si para cada $x \in M$ existe una subvariedad Σ que pasa por x tal que $T_y\Sigma = \Delta(y)$ para todo $y \in \Sigma$. A Σ se le llama una subvariedad integral de Δ. Una distribución totalmente integrable se llama una foliación y a las subvariedades integrables se les denomina hojas.

Campo vectorial en $\mathbf{R}^3$

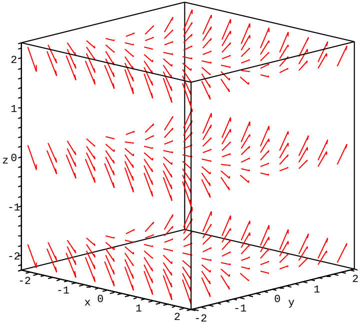

Figura: Campo E_1

$$\boxed{E_1 = [1, 0, y]}$$

Campo vectorial en $\mathbf{R}^3$

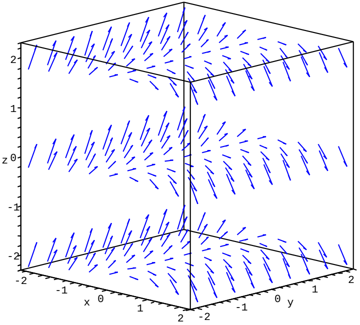

Figura: Campo E_2

$$\boxed{E_2 = [0, 1, -x]}$$

Dos campos vectoriales en $\mathbf{R}^3$

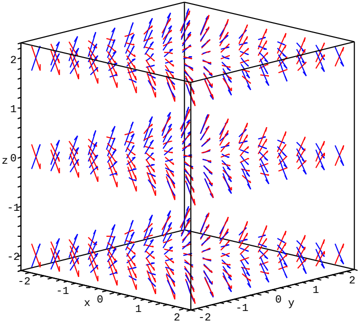

Figura: Campos E_1 y E_2

$$\boxed{E_1 = [1, 0, y];\ E_2 = [0, 1, -x]}$$

Distribución $\mathbf{R}^3$

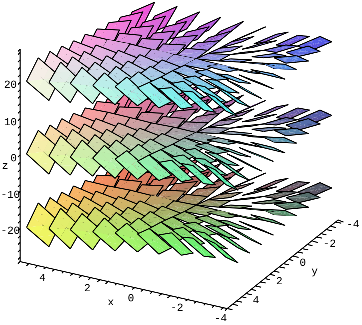

Figura: Distribución

$$\boxed{\Delta = span\{E_1, E_2\}}$$

Teorema de Frobenius

Una distribución está bien definida por un campo de vectores $\{E_1, \ldots, E_m\}$ que generan a $\Delta(x) \subset T_x M$, o por 1-formas diferenciales $\{\omega^1, \ldots, \omega^{n-m}\}$, tales que para todo $X \in T_x M$, $X \in \Delta(x)$ sii $\omega^\alpha(X) = 0$, $\alpha = 1, \ldots, n-m$.

Teorema

Sea Δ una distribución sobre M, localmente dada por $\{E_a\}_{a=1,\ldots,m}$ o $\{\omega^\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,n-m}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *Δ es completamente integrable.*
2. *$[E_a, E_b] = Q^c_{ab} E_c$, donde Q^c_{ab} son funciones.*
3. *$d\omega^\alpha = Q^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta$, donde Q^α_β son 1-formas.*

donde,

$$[X, Y](x) = DY(x)X(x) - DX(x)Y(x)$$

Distribución involutiva

Definición

Una distribución Δ es involutiva si para cada par de campos vectoriales $X, Y \in \Delta$

$$[X, Y] \in \Delta$$

Teorema

Si una distribución Δ es involutiva y tiene dimensión constante m, entonces ella es integrable.

Teorema de Chow-Rashevskii

Definición

$\Delta = span\{E_1, \dots, E_m\}$ es corchete generada si la iteración de los corchetes de Lie

$$E_i, [E_i, E_j], [E_i, [E_j, E_k]], \dots \quad 1 \leq i, j, k, \dots \leq m$$

generan el espacio tangente de M en todo punto.

Teorema

Si Δ es corchete generada, entonces cualquier par de puntos pueden ser unidos con una trayectoria tangente a Δ (Horizontal) casi en todas partes. La trayectoria puede ser escogida suave por partes, de arcos de trayectorias integrales de los campos E_i.

Teorema

Si una distribución de control es corchete generada, entonces el sistema es controlable.

$$\boxed{\text{Si } \Delta \text{ es no integrable} \Rightarrow \text{el sistema es controlable}}$$

Ejemplo 1: Distribución integrable

Sea $M = \mathbf{R}^3$

$$\omega = dz - xdx - ydy \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\Delta = span\{E_1, E_2\} \tag{3}$$

1. Δ es completamente integrable.
2. $[E_1, E_2] = 0$
3. $d\omega = 0$

Δ es la foliación, que consite en los planos tangentes a la familia de paraboloides:

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c \tag{4}$$

Ejemplo 2: Distribución no integrable

Sea $M = \mathbf{R}^3$

$$\omega = dz - ydx + xdy \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -x \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\Delta = span\{E_1, E_2\} \tag{6}$$

1. Δ es completamente no integrable.
2. $[E_1, E_2] = E_3 = -2\frac{\partial}{\partial z}$, además $\omega(E_3) = -2 \neq 0$
3. $d\omega = 2dx \wedge dy$

Ejemplo 3: El monociclo

Sea $M = \mathbf{R}^3$

$$\omega = \sin z dx - \cos z dy \quad E_1 = \begin{pmatrix} \cos z \\ \sin z \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\Delta = span\{E_1, E_2\} \tag{8}$$

1. Δ es completamente no integrable.
2. $[E_1, E_2] = E_3 = \sin z\frac{\partial}{\partial x} - \cos z\frac{\partial}{\partial y}$, además $\omega(E_3) = 1 \neq 0$
3. $d\omega = -\cos z dx \wedge dz - \sin z dy \wedge dz$

Contenido

Haces Principales

Un haz principal es un objeto matemático P que formaliza algunas de las características esenciales del producto cartesiano $M \times G$, donde M es una variedad y G es un grupo de Lie. En P están definidos:

1. Una acción de G sobre P, $(x, g)h = (x, gh)$
2. Una proyección $\pi : P \longrightarrow M$, $u = (x, g) \mapsto x$

Ejemplo

En cada punto $x \in M = \mathbf{R}^2$ considemos todas los <u>marcos ordenados ortonormales</u>. El grupo G es el Grupo Ortogonal Especial $SO(2)$ que actúa sobre las bases ordenadas.

Conexiones en Haces Principales

Una conexión en P es una asignación de un subespacio $V_u \subseteq T_uP$ (Vertical), para cada $u \in P$ que satisface:

1. $T_uP = \mathcal{H}_u \oplus V_u$
2. $V_{ua} = (R_a)_* V_u$
3. V_u depende diferenciablemente de u.

donde $\mathcal{H}_u$ (Horizontal) es el "complemento ortogonal" de V_u.
Definir una *conexión* en un haz principal es equivalente a definir una *distribución*.

Contenido

La forma ω de la conexión

Sean M una veriedad de Riemann bi-dimensional con una métrica g, P el haz de marcos ortonormales de M y $SO(2)$ actuando sobre P, $\pi : P \longrightarrow M$, y ∇ la conexión de Levi-Civita.
La forma ω de la conexión en P está definida por,

$$\omega = R(\varphi)^{-1}\left(\frac{dR(\varphi)}{d\varphi}d\varphi + \Gamma_a R(\varphi)\theta^a\right)$$

donde

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

La forma ω y la distribución $\mathcal{H}$

Por lo tanto, de la fórmula anterior tenemos

$$\omega = d\varphi + \Gamma^1_{12}\theta^1 + \Gamma^1_{22}\theta^2 \tag{9}$$

De lo cual obtenemos,

$$\begin{aligned} E^h_1 &= e_1 - \Gamma^1_{12}\partial\varphi && (10) \\ E^h_2 &= e_2 - \Gamma^1_{22}\partial\varphi && (11) \end{aligned}$$

donde $e = (e_1, e_2)$ es un marco ortonormal en $U \subset M$.
E^h es el levantamiento horizontal de e.
La distribución por definición es,

$$\mathcal{H} = \ker\omega = span\left\{E^h_1, E^h_2\right\} \tag{12}$$

Campos vectoriales horizontales y verticales

Los campos vectoriales horizontales estándar, se definen como

$$\{B_1, B_2\} = \{E_1^h, E_2^h\}R(\varphi) \tag{13}$$

El campo vectorial fundamental (vertical), se define como

$$\sigma(A) = m\partial_\varphi, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix} \quad m \in \mathbf{R} \tag{14}$$

El tensor no holonómico

$$N(X, Y) = proj_V([X, Y]) \tag{15}$$

Proposición

El tensor no holonómico N tiene la siguiente expresión

$$N(E_1^h(x, \varphi), E_2^h(x, \varphi)) = -K(x)\partial_\varphi \tag{16}$$

donde $K(x)$ es la curvatura de (M, g) en $x \in M$.

Levantamiento de Wagner de la métrica

Denotemos por $\hat{g}$ el levantamiento de Wagner de g. Por definición y por construcción tenemos,

$$\begin{aligned} \hat{g}(E_a^h, E_b^h) &= g(d\pi(E_a^h), d\pi(E_b^h)) = g(e_a, e_b) = \delta_{ab} \\ \hat{g}(E_a^h, \partial_\varphi) &= 0. \end{aligned}$$

y por lo tanto $\{E_1^h, E_2^h\}$ es un marco ortonormal. Por otro lado $g^\Lambda(E_1^h \wedge E_2^h, E_1^h \wedge E_2^h) = 1$ respecto a la métrica g^Λ inducida sobre $\Lambda^2(\mathcal{H})$. Por lo tanto tenemos que,

$$\hat{g}(K(x)\partial_\varphi, K(x)\partial_\varphi) = 1. \tag{17}$$

Marcos ortonormales en P

Definición

Sobre P definimos el siguiente campo de marcos ortonormales respecto a $\hat{g}$:

$$\{\mathcal{E}_1(x,\varphi) = E_1^h, \quad \mathcal{E}_2(x,\varphi) = E_2^h, \quad \mathcal{E}_3(x,\varphi) = K(x)\partial_\varphi\} \tag{18}$$

Proposición

Sea $\hat{\gamma}(t)$ una geodésica de la conexión $\hat{\nabla}$ sobre P, y

$$\frac{d}{dt}\hat{\gamma}(t) = Q^i(t)\mathcal{E}_i|_{\gamma(t)} \tag{19}$$

el campo vectorial tangente a los largo de la geodésica. Entonces,

$$\frac{dQ^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}(\gamma(t))Q^i(t)Q^j(t) = 0. \tag{20}$$

Relación entre geodésicas

Proposición

Sean $\hat{\gamma}(t)$ una geodésica y $\gamma(t)$, $t \in [0, a]$ su proyección sobre M. Entonces,

1. $$\hat{g}(\mathcal{E}_3, \frac{d\hat{\gamma}}{dt}(t))/K(\gamma(t)) = C \quad (Constante) \tag{21}$$
2. *Si $\frac{d\hat{\gamma}}{dt}(t))$ es horizontal en t_0, entonces $\hat{\gamma}$ es una curva horizontal para todo t.*
3. *γ satisface la ecuación*

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = CKJ\dot{\gamma} + C^2 KgradK, \tag{22}$$

Ejemplo: Curvatura constante positiva $K > 0$

Sea $M = \mathbb{S}^2$ con la métrica estándar. El haz $\pi : P \to \mathbb{S}^2$ es isomorfo al $SO(2)$-haz principal $\pi' : SO(3) \to \mathbb{S}^2$.
Por lo tanto,

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

y las ecuaciones estructurales son

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_3, \quad [\xi_3, \xi_1] = \xi_2, \quad [\xi_2, \xi_3] = \xi_1. \tag{24}$$

Ejemplo: Curvatura constante negativa $K > 0$

Sea (M, g) el modelo de Poincaré del plano de Lobachevskii, esto es $M = \{(x, y) \mid y > 0\}$, y $g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$. Entonces tenemos el marco ortonormal global $e_1 = y\partial_x$, $e_2 = y\partial_y$, donde $\{\partial_x, \partial_y\}$ es el marco natural del sistema de coordenadas globales (x, y) sobre M. Por lo tanto,

$$\mathcal{E}_1 = e_1 + \partial_\varphi, \mathcal{E}_2 = e_2, \mathcal{E}_3 = \partial_\varphi. \tag{25}$$

y las ecuaciones estructurales son

$$[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2] = -\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3, [\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3] = 0, [\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_1] = 0. \tag{26}$$

Contenido

Gracias

Muchas Gracias!

José Ricardo Arteaga B. — jarteaga@uniandes.edu.co

Mikhail Malakhaltsev. — Mikhail.Malakhaltsev@ksu.ru

Referencias I

Aminov Yu.
The Geometry of Vector Fields.
Amsterdam: Gordon and Breach Publishers, 2000

Kobayashi S., Nomizu K.,
Foundations of Differential Geometry.
Vol I, John Wiley & Sons, N.Y. 1963.

Montgomery R.
A Tour of Subriemannian geometries, Their Geodesics and Applications.
Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 91, AMS, 2002.

Referencias II

Wagner V.V.,
Differencialnaja geometrija negolonomnyh mnogoobrazij.
VIII mezhd. konkurs na soiskanie premii im. N. I. Lobachevskogo. 1937. (In Russian)

Agrachev A.A.
Introduction to Optimal Control Theory
Lectures given at Summer Mathematical Contrl Theory,
Trieste, 3-28 September 2001